

EXAMEN FINAL

La calculatrice, l'effaceur et le téléphone portable sont strictement interdits

**Exercice 1. [6.5 points]**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx, \quad I_2 = \int_{-1}^3 |x^2 - 1| dx, \quad I_3 = \int \frac{\cos x}{(2 + \sin^2 x) \sin x} dx.$$

**Exercice 2. [4 points]**

Soit  $(E)$  l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y = f(x) \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation différentielle  $(E)$ .
2. Trouver la solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$  dans le cas où  $f(x) = 4x^2$ .
3. Trouver la solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$  dans le cas où  $f(x) = 10e^{-x}$ .
4. Déduire la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + 4y = 4x^2 + 10e^{-x}$ .

**Exercice 3. [9.5 points]**

On considère  $(S_m)$  le système linéaire suivant :

$$(S_m) \quad \begin{cases} x + y - z & = 1 \\ x + 2y + mz & = 2 \\ 2x + my + 2z & = 3 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

1. Donner l'écriture matricielle du système linéaire  $(S_m)$ .
2. Pour quelles valeurs de  $m$  le système linéaire  $(S_m)$  est-il de Cramer ?
3. On pose  $m = -2$ . Résoudre le système linéaire  $(S_{-2})$  par la méthode de Gauss.
4. On pose  $m = 3$ . Résoudre le système linéaire  $(S_3)$  par la méthode de Gauss.
5. On pose  $m = 0$ . Résoudre le système linéaire  $(S_0)$  en utilisant la matrice inverse.
6. Déterminer suivant les valeurs de  $m$  le nombre de solutions du système homogène suivant :  
(il n'est pas demandé de calculer les solutions)

$$(S_h) \quad \begin{cases} x + y - z & = 0 \\ x + 2y + mz & = 0 \\ 2x + my + 2z & = 0 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$