Université A/Mira de Béjaia. Janvier 2023
FSE, Dpt d'Informatique 1h:30min
2ème année RN.

Examen de remplacement d'Algèbre 03

Exercice 01: 07 pts

Résoudre avec la méthode de Cramer, ensuite avec la méthode du pivot de Gauss, le système suivant:

$$(S): \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+z=-2 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$$

Exercice 02: 07 pts

Résoudre le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=-x+2y+z \\ z'=x+z \end{cases}$$

Exercice 03: 06 pts

Résoudre le système de suites suivant:

$$\begin{cases} U_{n+1}=2U_n+V_n+1 \\ V_{n+1}=U_n+2V_n+2 \end{cases} \quad \text{tq } U_0=1, V_0=0.$$

Bon Courage

Solution de l'examen de remplacement

Janv 2023

Exercice ① :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

* Méthode de Cramer :

$(S) \Leftrightarrow AX = b$

$\det A = -1 - (-1) - 1 = -1 \neq 0$ (0,5)

$\Rightarrow$ la sol existe et unique.

$$x = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \boxed{x = -6}$$ (1)

$$y = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-5+1-7) = 11$$

$$\boxed{y = 11}$$ (1)

$$z = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2-7+1)$$

$$\boxed{z = 4}$$ (1)

$(x, y, z) = (-6, 11, 4)$ est sol de (S)

* Méthode du Pivot de Gauss.

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ matrice augmentée (0,5)

1ère étape : $a_{11} = 1 \neq 0$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

2ème étape : $a'_{22} = -1 \neq 0$

$L'_3 \leftarrow L'_3 - L'_2$

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$\boxed{z = 4}$ (1)

$-y + 2z = -3 \Rightarrow \boxed{y = 11}$ (1)

$x + y - z = 1 \Rightarrow \boxed{x = -6}$ (1)

Exercice ② :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (-(1-\lambda) - 1)$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 2 - \lambda$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1)$$ (1)

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ où $(1-\lambda)^2 + 1 = 0$

d'où $\lambda = 2 \vee \lambda = 1+i \vee \lambda = 1-i$

$\lambda_1 = 2$ v.p simple, $\alpha_1 = 1$ (0,5)

$\lambda_2 = 1+i$ vp ... , $\alpha_2 = 1$ (0,5)

$\lambda_3 = 1-i$ vp ... , $\alpha_3 = 1$ (0,5)

$*E_{\lambda_1} = \ker(A-\lambda_1 I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \Rightarrow y=x \\ -x+z=0 \Rightarrow z=x \\ x-z=0 \end{cases}$

$E_{\lambda_1} = \text{vect}\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ (0,5), $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \alpha_1$

$*E_{\lambda_2} = \ker(A-\lambda_2 I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -ix+y=0 \\ -x+(1-i)y+z=0 \\ x-iz=0 \end{cases}$

$y = ix$, $z = -ix$

$E_{\lambda_2} = \text{vect}\left\{v_2 = \begin{pmatrix}1\\i\\-i\end{pmatrix}\right\}$ (0,5), $\dim E_{\lambda_2} = 1 = \alpha_2$

$*E_{\lambda_3} = \ker(A-\lambda_3 I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} ix+y=0 \\ -x+(1+i)y+z=0 \\ x+iz=0 \end{cases}$

$y = -ix$, $z = ix$

$E_{\lambda_3} = \text{vect}\left\{v_3 = \begin{pmatrix}1\\-i\\i\end{pmatrix}\right\}$ (0,5), $\dim E_{\lambda_3} = 1 = \alpha_3$

A est diagonalisable $\Rightarrow \exists$ P inversible et D diagonale tq $A = PDP^{-1}$

$P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&i&-i\\1&-i&i\end{pmatrix}$ (0,25), $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1+i&0\\0&0&1-i\end{pmatrix}$ (0,25)

$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X$

On pose $Y = P^{-1}X$ (0,25) $\Rightarrow X' = PDY$

$\Rightarrow Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}PDP^{-1}X$

d'où $Y' = DY$ (0,25)

$$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1+i&0\\0&0&1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y_1\\(1+i)y_2\\(1-i)y_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha e^{2x} \\ y_2 = \beta e^{(1+i)x} \\ y_3 = \gamma e^{(1-i)x} \end{cases}$$ (0,75)

où α, β, γ trois cstes réelles.

On a posé $Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY$ (0,5)

D'où $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&i&-i\\1&-i&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha e^{2x}\\\beta e^{(1+i)x}\\\gamma e^{(1-i)x}\end{pmatrix}$

$x = \alpha e^{2x} + \beta e^{(1+i)x} + \gamma e^{(1-i)x}$

$y = \alpha e^{2x} + \beta i e^{(1+i)x} - \gamma i e^{(1-i)x}$ (0,5)

$z = \alpha e^{2x} - \beta i e^{(1+i)x} + \gamma i e^{(1-i)x}$

Exercice n°4 03 :

$$\begin{pmatrix}U_{n+1}\\V_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_n\\V_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$X_{n+1} = AX_n + b \Rightarrow X_n = AX_{n-1} + b$ (0,5)

On trouve $X_n = A^n X_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + I_2)b$ (0,5)

On remarque que :

$A = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}+1&-1\\-1&+1\end{pmatrix}$ (1)

$= 3/2\ U + 1/2\ V$

$UV = VU = 0$. (1)

On peut donc utiliser la formule de binôme matricielle.

On trouve $A^n = \frac{3^n}{2}U + \frac{1^n}{2}V$

$A^n = \frac{3^n}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2}\\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2}\end{pmatrix}$ (1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I = H$

$H = \begin{pmatrix} \frac{3^{n-1}+1}{2} + \frac{3^{n-2}+1}{2} + \dots + 2 + 1 & \frac{3^{n-1}-1}{2} + \frac{3^{n-2}-1}{2} + \dots + 1 + 0 \\ \frac{3^{n-1}-1}{2} + \frac{3^{n-2}-1}{2} + \dots + 1 + 0 & \frac{3^{n-1}+1}{2} + \frac{3^{n-2}+1}{2} + \dots + 2 + 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left[(3^{n-1}+1) + (3^{n-2}+1) + \dots + (3^{n-(n-1)}+1) + (3^{n-n}+1)\right]$

$= \frac{1}{2}(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^{n-n} + n) = \frac{1}{2}\left[3\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right.$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{2} & \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2} \\ \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2} & \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{2} \end{pmatrix}$$ (0,5)

$$Hxb = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-n \\ \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2} \\ 9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+n/2 \end{pmatrix}$$ (0,5)

$$A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} \end{pmatrix}$$ (0,5)

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n X_0 + Hb$$

D'où $u_n = \frac{3^n+1}{2} + 9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right) - n/2$ (0,25)

et $v_n = \frac{3^n-1}{2} + 9/4\left(1-\frac{1}{3^n}\right) + n/2$ (0,25)