

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة برج بوعريريج  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
قسم الهندسة المدنية  
Université de Bordj Bou Arreridj  
Faculté des sciences et de la technologie  
Génie Civil Département de

# Résistance des Matériaux

Cours et exercices

Dr. KESSAL Oussama



2<sup>ème</sup> année Génie Civil

# PRÉFACE

La résistance des matériaux RDM, est une partie de la mécanique des milieux Continus. Elle s'intéresse à déterminer les dimensions des éléments d'une construction ou des pièces mécaniques, afin qu'ils supportent les efforts auxquels ils sont soumis dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie de matière.

Ce document est basé sur le programme pédagogique destiné aux étudiants du deuxième année génie civil et d'autres spécialités qui s'intéressent par cette discipline.

Cet ouvrage comporte des notions fondamentales de la RDM et poursuit de simples objectifs ; ceux de fournir des réponses et des outils Pour apprendre :

- Les notions de base de la résistance des matériaux,
- Les buts et les hypothèses de la RDM,
- La notion des efforts internes,
- Les caractéristiques géométriques des sections,
- La loi de comportement des matériaux,
- La notion de contraintes admissibles et le dimensionnement des pièces sous sollicitations simples.

Le polycopié est divisé en six chapitres, chaque chapitre contient un détail et suivi par une série d'exercice qui aideront l'étudiant à assimiler le cours et permet de fournir des informations supplémentaires.

# ***Table des matières***

<b>PRÉFACE .....</b>	<b>2</b>
----------------------	----------

## CHAPITRE I : Introduction et généralités

I.1. Définition et objectif de RDM .....	8
Objectif de l'RDM .....	8
I.2 Hypothèses de la résistance des matériaux : .....	8
I.2.1 Hypothèses sur les matériaux.....	8
L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau : .....	8
L'élasticité et la linéarité du matériau : .....	9
I.2.2 Hypothèses sur la géométrie : .....	9
I.2.3 Hypothèses sur les efforts : .....	9
Hypothèse de Saint Venant .....	9
I.3 Différents types de chargements .....	10
a) Charge surfacique :.....	10
b) Charge linéaire : .....	10
c) Charge concentrée.....	11
I.4 SCHÉMATISATION DES LIAISONS (réaction d'appui) .....	11
a) L'appui simple .....	11
b) L'appui double (articulation).....	12
c) L'encastrement.....	12
I.5 Principe Général d'équilibre -Équations d'équilibres : .....	12
I.6 Notion des efforts internes .....	13
- Effort Normal : .....	13
- Efforts tranchants : .....	13
- Moments fléchissant.....	13
- Le moment de torsion $M_t$ .....	14
I.7 Méthode des sections .....	14
1.9Unités .....	15
I.10 Exercice.....	15

## CHAPITRE II : Caractéristiques géométriques des sections droites

II.1 Introduction .....	20
II.2 Centre de gravite.....	20

II.3 Moments statiques : .....	20
II.4 Les Moments d'inertie .....	21
II.4.1 Démonstration appliquée à une surface rectangulaire .....	21
II.4.2 Démonstration appliquée à une surface triangulaire .....	21
II.4.3 Moment d'inertie polaire.....	22
II.4.4 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge).....	22
II.5 Transformation des moments d'inertie .....	22
II.5.1 Théorèmes de Huygens.....	22
Démonstration du théorème de Huygens .....	23
II.5.2 Rotations d'axes : .....	23
II.5.3 Les directions principales .....	24
Expression des moments quadratiques principaux.....	25
II.6 Module de résistance .....	25
II.7 Rayon de giration.....	25
II.8 Exercice .....	26

### CHAPITRE III : Traction simple et compression simple

III.1 Définitions,.....	30
III.2 Efforts normaux de traction et de compression .....	30
III.3 L'essai de Traction : .....	31
III.4 Coefficient de Poisson.....	33
III.5. Déformation élastique .....	33
III.6 Condition de résistance et notion de contrainte admissible.....	34
III.6.1 Notion de coefficient de sécurité .....	34
III.7 Exercices .....	34

### CHAPITRE IV : Flexion simple

IV.1 Définitions.....	38
IV.2 Hypothèses à la flexion plane simple .....	39
IV.3 Essai de flexion .....	39
IV.4. Efforts tranchants, et Moments fléchissant .....	40
IV.4.1 Effort tranchant .....	40
IV.4.2 Moment fléchissant .....	40
IV.5 Relation différentielle entre la charge, Effort tranchant et Moment fléchissant. ....	40
IV.6 Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant, .....	41
1-Charge concentrée à mi-travée : .....	41
2-Charge uniformément répartie : .....	43

IV.7 Contraintes en flexion simple,.....	44
IV.8 Notion de l'axe neutre.....	46
IV.9 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche),.....	46
IV.10 Calcul de la contrainte tangentielle. ....	48
IV.11 Condition de la résistance des poutres sollicitées à la flexion simple.....	50
Par rapport aux contraintes normales .....	50
Par rapport aux contraintes tangentielles.....	51
IV.12. Exercice.....	51

#### CHAPITRE IV : Cisaillement

V.1 Définitions.....	56
Exemple.....	56
Cisaillement d'une poutre .....	56
Cisaillement dans un rivet .....	56
V.2 Cisaillement simple et Cisaillement pur :.....	56
Cisaillement simple : .....	57
V.3 Contrainte de cisaillement, .....	57
V.3.1 Essai de cisaillement : .....	57
V.4 Déformation élastique en cisaillement : .....	59
V.5. Condition de résistance au cisaillement.....	60
V.6 Exercice.....	60

#### CHAPITRE IV: Torsion

VI.1 Définitions :.....	64
VI.2 Hypothèses de base pour étudier la torsion :.....	64
VI.3 Déformation élastique en torsion : .....	64
VI.4 Contrainte tangentielle .....	65
VI.5 Condition de résistance à la torsion.....	66
VI.6 Exercice.....	67



# Introduction et généralités

---

- Buts et hypothèses de la résistance des matériaux,
- Différents types de chargements,
- Liaisons (appuis, encastrements, rotules),
- Principe Général d'équilibre -Équations d'équilibres,
- Méthode des sections
- Notion des efforts internes :
  - Effort normal  $N$ ,
  - Effort tranchant  $T$ ,
  - Moment fléchissant  $M$ ,
- Définitions, conventions de signes et unités.

## **I.1. Définition et objectif de RDM**

La résistance des matériaux est l'étude de comportement des éléments de constructions sous l'action des différents types de charges. Elle s'intéresse particulièrement au calcul des dimensions des structures et aussi à l'utilisation des matériaux dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie.

### ***Objectif de l'RDM***

La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- La connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux 'comportement des matériaux sous l'effet d'une charge mécanique'
- L'étude de la résistance d'une structure et ces éléments sous l'effet d'une charge mécanique.
- L'étude de la déformation d'une structure et ces éléments sous l'effet d'une charge mécanique.

La résistance des matériaux permet de résoudre 3 types de problèmes :

- Déterminer les dimensions d'une pièce pour lui permettre de résister à l'action des charges données.
- Déterminer les forces extérieures qui l'on peut appliquer à une pièce sans la détruire.
- Vitrifier la résistance, la rigidité et la stabilité des pièces de dimension donnée sous l'effet de l'action des charges données.

## **I.2 Hypothèses de la résistance des matériaux :**

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes ; généralement la RDM considère 3 hypothèses principales sur les matériaux, sur la géométrie, sur les efforts et sur les déformations.

### **I.2.1 Hypothèses sur les matériaux**

#### ***L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau :***

- Isotropes : le matériau possède les mêmes propriétés physiques pour tous les points
- Homogènes : le matériau possède les mêmes propriétés physiques dans toutes les directions en un point quelconque.
- Continus : le matériau est assimilé à un milieu continu. Les discontinuités microscopiques dues à la nature des matériaux de construction sont négligées



**L'élasticité et la linéarité du matériau :**

On suppose que chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial.

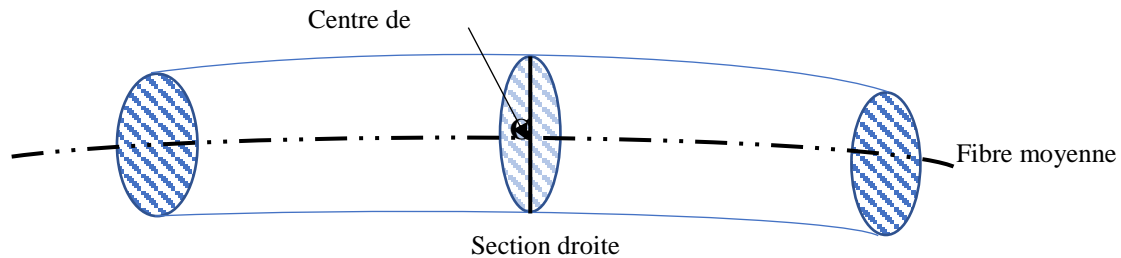


Figure I. 1 conception géométrique d'une poutre

**I.2.2 Hypothèses sur la géométrie :**

**Hypothèse des sections planes** (hypothèse de *Navier-Bernoulli*) : Les sections droites restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne au cours de la déformation.

**La petitesse des déformations** : les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.

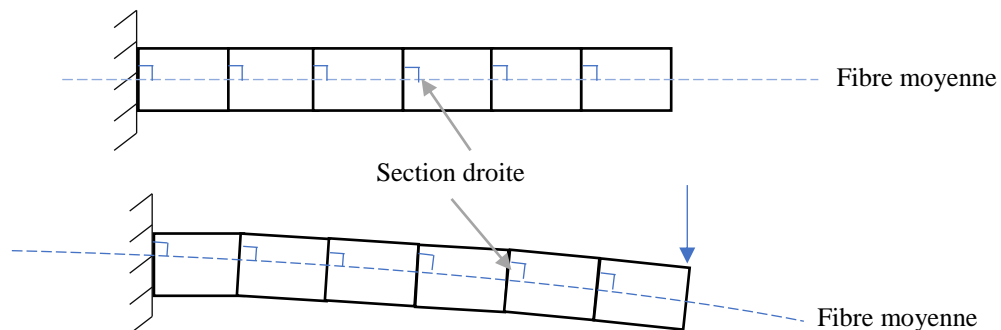


Figure I. 2 hypothèse de *Navier-Bernoulli*

**I.2.3 Hypothèses sur les efforts :**

**Hypothèse de Saint Venant** : Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

1. **Résistance** : La pièce doit supporter et transmettre les charges externes qui lui sont imposées, (la capacité qu'a un corps de résister aux forces appliquées).
2. **Rigidité** : La pièce ne doit pas subir de déformation excessive lorsqu'elle est sollicitée, (la propriété qu'a un corps à résister aux déformations).

3. **Stabilité** : La pièce doit conserver son intégrité géométrique afin que soient évitées des conditions d'instabilité (flambement).

4. **Endurance** : La pièce, si elle est soumise à un chargement répété, doit pouvoir tolérer sans rupture un certain nombre de cycles de sollicitation variable (fatigue).

5. **Résilience** : Enfin, dans le cas où un chargement dynamique (impact) est à prévoir, la pièce doit pouvoir absorber une certaine quantité d'énergie sans s'en trouver trop endommagée.

### I.3 Différents types de chargements

Les chargements peuvent être classés en plusieurs catégories. Généralement, ce classement est basé sur la zone d'application, on distingue des sollicitations surfaciques, linéaires et ponctuelles (concentrée).

a) **Charge surfacique** : Sont représentées par le contact sur la surface du corps solide.

*Le cas d'une boîte sur un plan.*

L'action du plan sur la boîte peut être représentée par une force surfacique (force répartie sur une surface équivalente à une pression.  $\vec{F}_{0/1}$  se mesure en  $(N/m^2)$ ).

Si la charge est uniforme, alors l'ensemble de la charge surfacique est équivalent à une force  $\vec{F}_{0/1}$  située au centre de la surface de contact. Elle se mesure en (N).



Figure I. 3 Schématisation d'une charge surfacique.

b) **Charge linéaire** : sont présentées par la distribution de la densité de charge sur la longueur totale ou partielle de l'élément étudié on trouve charge linéaire uniforme répartie, trapézoïdale, triangulaire ou non uniforme

b) *Cas d'un cylindre sur un plan.*

L'action du plan sur le cylindre peut être représentée par une force linéique (force répartie le long d'une ligne)  $\vec{F}_{0/1}$ . Elle se mesure en (N/m).

Si la charge est uniforme, alors l'ensemble de la charge linéique est équivalent à une force  $\vec{F}_{0/1}$  située au centre de la ligne de contact.

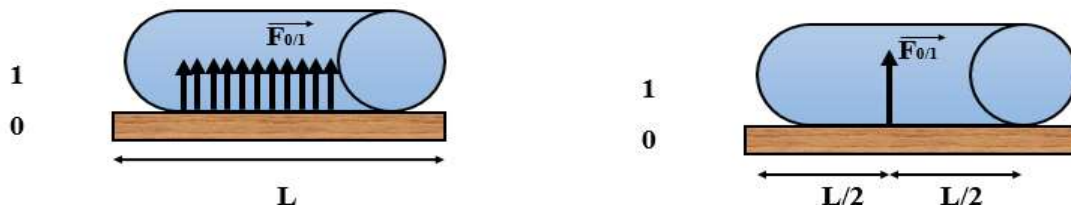


Figure I. 4 Schématisation d'une charge linéaire.

c) **Charge concentrée** ; sont caractérisées par leurs intensités et la direction de leurs applications,

**Cas d'une bille sur un plan.** L'action du plan sur la bille peut être représentée par une force  $\vec{F}_{0/1}$

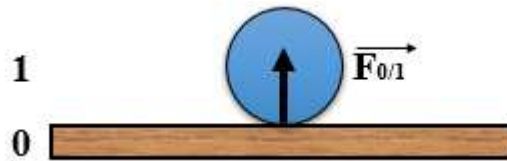


Figure I. 5 Schématisation d'une charge concentrée.

#### I.4 SCHÉMATISATION DES LIAISONS (réaction d'appui)

Une structure est reliée à l'extérieur par un certain nombre de liaisons. Une liaison impose des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème.

La classification des appuis se fait d'après le nombre de degrés de liberté (ddl) (c'est-à-dire les possibilités de mouvement) qu'ils laissent au système et d'après la nature des réactions qu'ils peuvent exercer sur lui.

##### a) L'appui simple

Il a deux degrés de liberté :

- 1- La rotation autour de l'appui,
- 2- La translation parallèlement au support de l'appui.

La réaction est connue par son point d'application (point de contact du système avec l'appui) et par sa direction (elle est perpendiculaire au support). Seule l'intensité reste à déterminer.

En résumé, l'appui simple se caractérise par : 2 degrés de liberté et 1 composante de réaction.

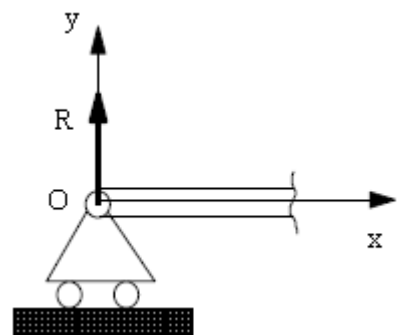


Figure I. 6 Appui simple

**b) L'appui double (articulation)**

Il a un seul degré de liberté, la rotation autour de l'appui. Toute translation est par contre empêchée.

Dans ce cas, la réaction de l'appui est connue uniquement par son point d'application, le point de contact du système avec l'appui (point A) (la ligne d'action de la réaction passe par A). La réaction est décomposée suivant deux directions perpendiculaires et les deux composantes sont à déterminer. L'appui double présente donc 1 degré de liberté et 2 composantes de réaction.

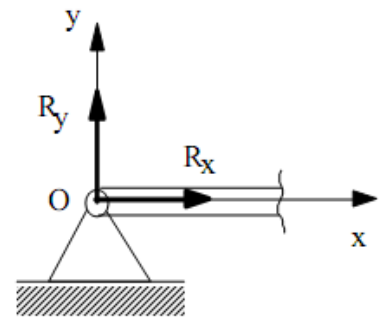


Figure I. 7 Appui double (articulation)

**c) L'encastrement**

Il n'a aucun degré de liberté. Tout déplacement est empêché. La réaction est un vecteur pouvant occuper n'importe quelle position du plan. On peut toutefois décomposer la réaction en 3 composantes :

- deux composantes suivant deux directions perpendiculaires et passant par A
- un couple appliqué en A.

En définitive, l'encastrement se caractérise par : 0 degré de liberté et 3 composantes de réaction.

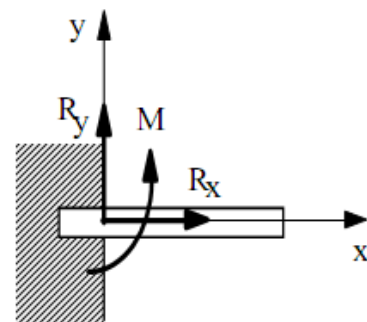


Figure I. 8 Encastrement

**I.5 Principe Général d'équilibre -Équations d'équilibres :**

Sous l'effet des charges extérieures, on cherche les conditions d'équilibre des corps solides au repos, ces conditions sont assurées si les résultantes des moments et les forces agissent sur l'élément étudié sont nulles, on exprime les résultantes par leurs formes vectorielles :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{i/o} = \vec{0}$$

Dans le cas des structures plans, chargées dans leurs plans, les résultantes se réduisent en trois équations scalaires de forme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_x^i = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_y^i = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_z^i = 0 \end{array} \right.$$

## I.6 Notion des efforts internes

On appelle forces (solllicitation) extérieures ou charges les forces appliquées connues sur un élément de structure donnée.

Les efforts internes sont des efforts qui se développent à l'intérieur du corps solide pour assurer l'équilibre sous l'action des forces extérieure qui agissent sur l'élément structural.

La détermination des efforts internes permet de :

- Extraire les informations nécessaires sur l'état de sollcitation de l'élément étudié
- Vérifier sa résistance vis-à-vis les sollcitations appliquées.

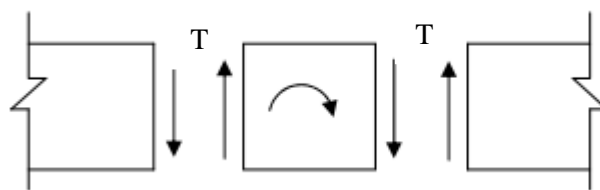
Pour le cas des éléments de la structure plans, on distingue trois efforts internes :

- ***Effort Normal :***

La composante  $N$  de la résultante  $F$  représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément.  $N$  est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.

- ***Efforts tranchants :***

Les forces transversales  $T_z$ , et  $T_y$  sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes  $Z$  et  $Y$ . Le sens de  $T$  sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre.



*Figure I. 9 Efforts tranchants*

- ***Moments fléchissant***

Les composantes  $M_y$  et  $M_z$  du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière  $Y$  et  $Z$  respectivement. Le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

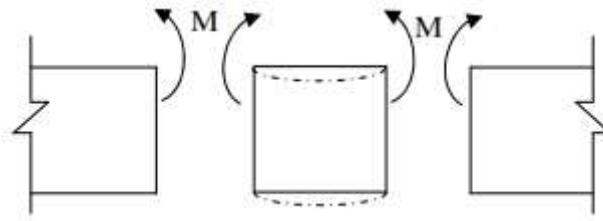
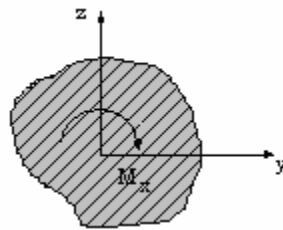


Figure I. 10 Moments fléchissant

- **Le moment de torsion  $M_t$**

Le moment de torsion  $M_x$  (ou  $M_t$ ) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre  $x$ . Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure.

Figure I. 11 Le moment de torsion  $M_t$ 

## I.7 Méthode des sections

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la méthode des sections. Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section. On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures. Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts  $N$ ,  $Q$  et  $M$  sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

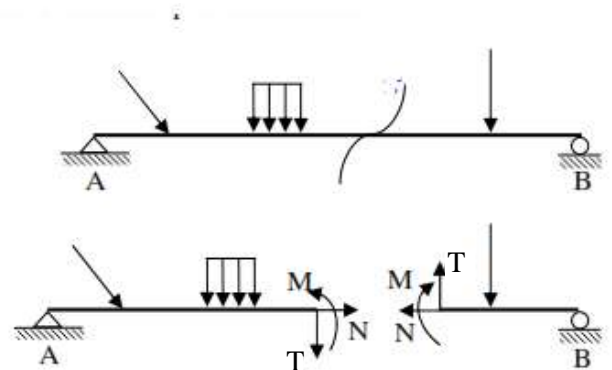


Figure I. 12 Méthode des sections

### 1.9 Unités

Les unités de mesure utilisées sont principalement celles du système d'unités international (SI) ; pour des raisons de commodité le système d'unités technique (MKS) est parfois utilisé

Tableau I. 1 Les unités de mesure

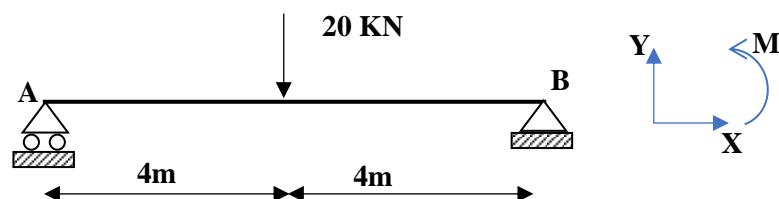
Unités	SI	MKS
Longueur 'le mètre'	m	M
Masse 'le kilogramme'	kg	Kgf=10N
Temps 'la seconde'	S	S
Force 'le Newton'	N, KN	t=10 <sup>3</sup> Kgf=10 <sup>4</sup> N
Contrainte	N/mm <sup>2</sup>	1bar= Kgf/cm <sup>2</sup> =0.1N/mm <sup>2</sup>
Travail 'joule'	J=N.m	Kgf.m=10J

### I.10 Exercice

#### Exercice 1

Soit une poutre de longueur  $l=8$  m appuyée en ses extrémités sur 2 appuis de niveau et supportant une charge concentrée (localisée).

- Déterminer les réactions d'appuis.
- Calculer les efforts internes (M, N, T).



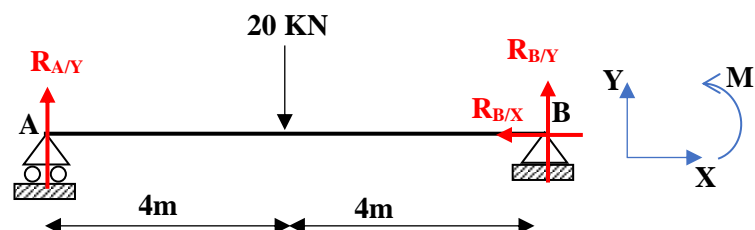
#### Solution exercice 1

##### 1-Calcul des réactions :

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases} \begin{cases} R_{B/x} = 0 \\ +R_{A/y} + R_{B/y} - 20 = 0 \\ (R_{B/y} * 8) - (20 * 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{B/x} = 0. \\ R_{A/y} = 10 \text{ KN.} \\ R_{B/y} = 10 \text{ KN.} \end{cases}$$



## 2. Calcul des efforts internes

### Zone 1 : $0 < X < 4m$

On applique le principe de la statique dans le tronçon gauche de la section S1

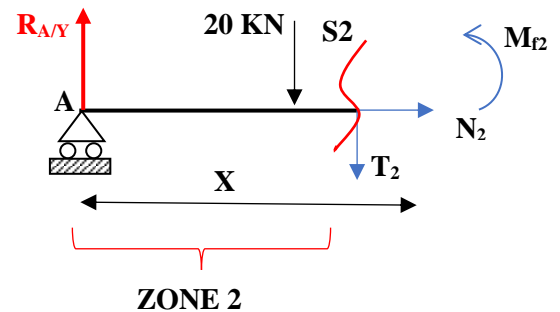
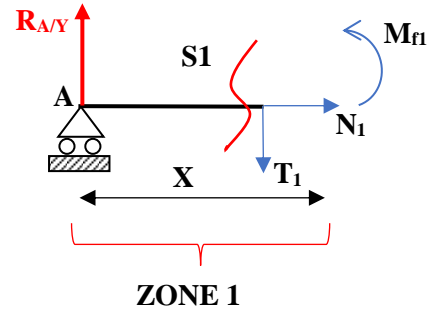
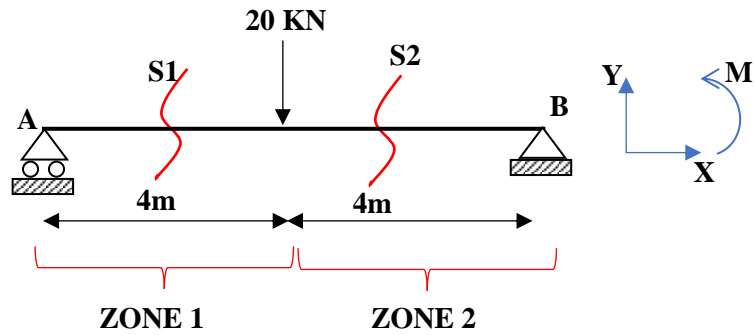
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S1} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_1 = 0 \\ R_{A/y} - T_1 = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + M_{f1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ T_1 = +R_{A/y} \\ M_{f1} = R_{A/y} * X \end{cases} \begin{cases} N_1 = 0 \\ T_1 = +10 \\ M_{f1} = 10 * X \end{cases}$$

### Zone 1 : $4 < X < 8m$

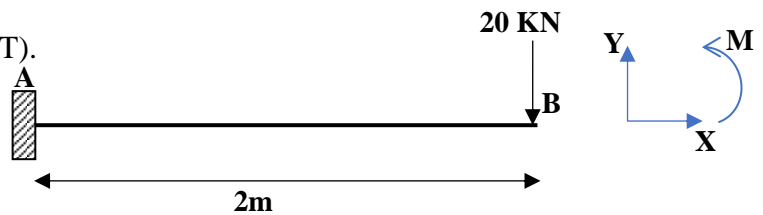
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S2} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_2 = 0 \\ R_{A/y} - 20 - T_2 = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + (20 * (X - 4)) + M_{f2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 = 0 \\ T_2 = +R_{A/y} - 20 \\ M_{f2} = R_{A/y} * X - (20 * (X - 4)) \end{cases} \begin{cases} N_2 = 0 \\ T_2 = -10 \\ M_{f2} = -10 * X + 80 \end{cases}$$



### Exercice 02

- Calculer les efforts internes (M, N, T).
- Déterminer les réactions d'appuis.



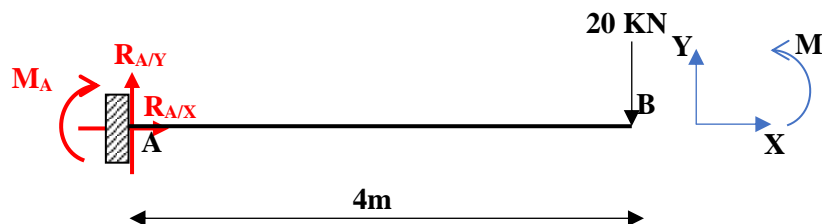
### Solution exercice 2

#### 1-Calcul des réactions :

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases} \begin{cases} R_{A/x} = 0 \\ +R_{A/y} - 20 = 0 \\ (R_{A/y} * 4) - M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{B/x} = 0. \\ R_{A/y} = 20 \text{ kN}. \\ M_A = +80 \text{ kN.m} \end{cases}$$





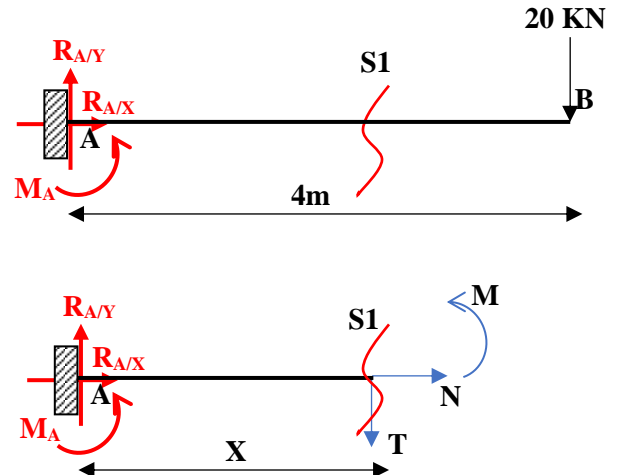
## 2. Calcul des efforts internes

### Zone 1 : $0 < X < 4\text{m}$

On applique le principe de la statique dans le tronçon gauche de la section S1

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S1} = 0 \end{cases} \begin{cases} N = 0 \\ R_{A/y} - T = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + M_f + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = R_{A/y} \\ M_f = (R_{A/y} * X) - M_A \end{cases} \begin{cases} N = 0 \\ T = 20\text{KN} \\ M_f = (20 * X) - 80 \end{cases}$$



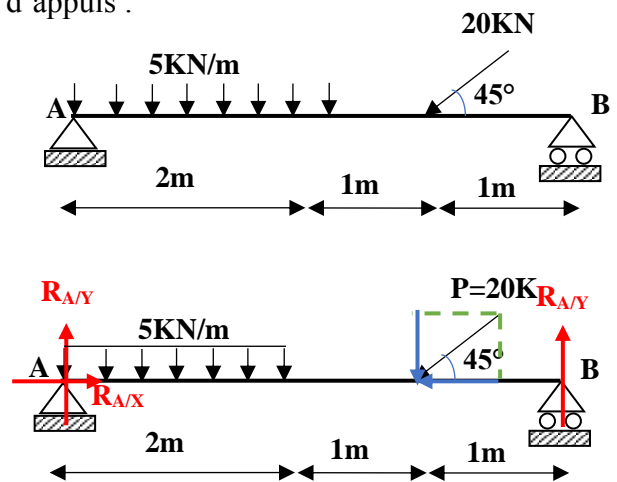
### Exercice 03

Pour la poutre suivante, déterminer les réactions d'appuis :

#### Solution exercice

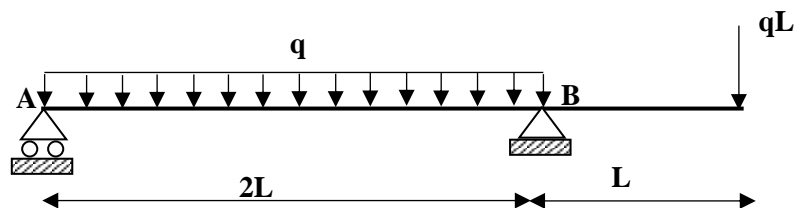
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases} \begin{cases} R_{A/x} - P * \cos 45^\circ = 0 \\ +R_{A/y} + R_{B/y} - (5 * 2) - (P * \sin 45^\circ) = 0 \\ (R_{A/y} * 4) - (5 * 2 * 3) - (P * \sin 45^\circ * 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{A/x} = 14.14\text{KN} \\ R_{A/y} = 11.03\text{KN} \\ R_{B/y} = 13.10\text{KN} \end{cases}$$



### Exercice 04

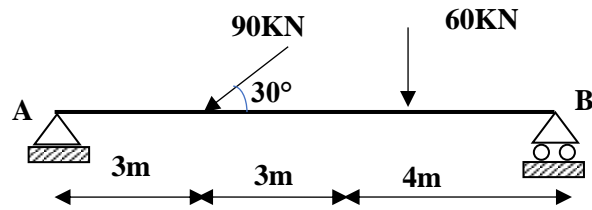
Pour la poutre suivante, déterminer les réactions d'appuis :



$$R_{B/x} = 0 \quad R_{B/y} = \frac{5qL}{2} \quad R_{A/y} = \frac{qL}{2}$$

### Exercice 05

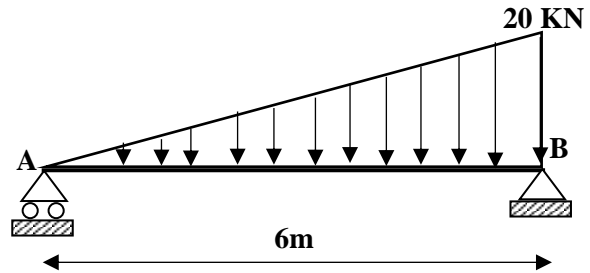
Pour la poutre suivante, déterminer les réactions d'appuis :



$$R_{A/x}=77.94\text{KN} \quad R_{A/y}=55.5\text{KN} \quad R_{B/y} = 49.5\text{KN}$$

**Exercice 06**

Pour la poutre suivante, déterminer les réactions d'appuis :



$$R_{B/x}=0\text{KN} \quad R_{A/y}=20\text{KN} \quad R_{B/y} = 40\text{KN}$$

## Chapitre II

---

# Caractéristiques géométriques des sections droites

---

- Centre de gravité,
- Moments statiques,
- Moments d'inertie d'une section droite,
- Transformation des moments d'inertie.
- Axes principaux centraux,
- Moments d'inertie principaux.
- Module de résistance
- Rayon de giration

## II.1 Introduction

En générale, la résolution des problèmes de l'RDM fait appel à l'aspect Géométrique 'caractéristiques' des sections droites des corps étudiés tel que : Centre de gravité, Moment statique, Moments quadratiques...

## II.2 Centre de gravité

On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section.

Les coordonnées du centre de gravité **G (X<sub>G</sub>, Y<sub>G</sub>)** d'une section homogène (S)

Sont données par les relations :

$$X_G = \frac{\sum X_i \times S_i}{\sum S_i} \quad Y_G = \frac{\sum Y_i \times S_i}{\sum S_i}$$

$$\sum S_i = S$$

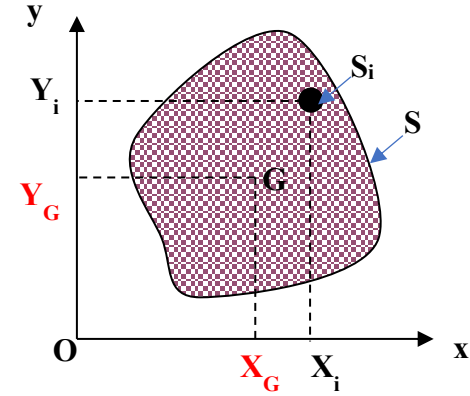


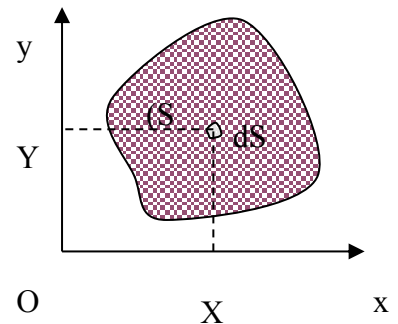
Figure II. 1 Centre de gravité

## II.3 Moments statiques :

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe XOY. On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OX et OY les quantités :

$$S_x = \iint y ds$$

$$S_y = \iint x ds$$



Par analogie avec le moment d'une force rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

$$S_x = S \cdot Y_G$$

$$S_y = S \cdot X_G$$

Pour les surfaces complexes discrétisées en n'aires simples les moments statiques par rapport aux axes Ox et Oy seront respectivement égaux à :

$$S_x = \sum S_i \times Y_i$$

$$S_y = \sum S_i \times X_i$$

Remarque : Le moment statique d'une surface par rapport à axe passant par son centre de gravité est nul.

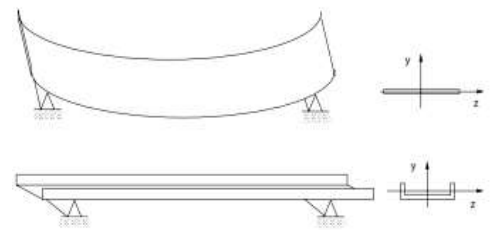
## II.4 Les Moments d'inertie

On appelle moment d'inertie (quadratique) l'intégrales produit des aires élémentaire par le carré des leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (s) quelconque par rapport à OX et OY sont les suivant :

$$I_x = \iint Y^2 ds$$

$$I_y = \iint X^2 ds$$

Le moment d'inertie de la section représente la capacité de la section à s'opposer à la déformation latérale, comme le montre l'exemple d'une feuille reposant sur deux appuis dont la déformation sous son poids propre est nettement plus importante que quand elle est pliée en forme de U, car le moment d'inertie  $I_z$  de la forme en U est plus grand que celui de la section rectangulaire.



### II.4.1 Démonstration appliquée à une surface rectangulaire y

$$I_z = \iint Y^2 ds$$

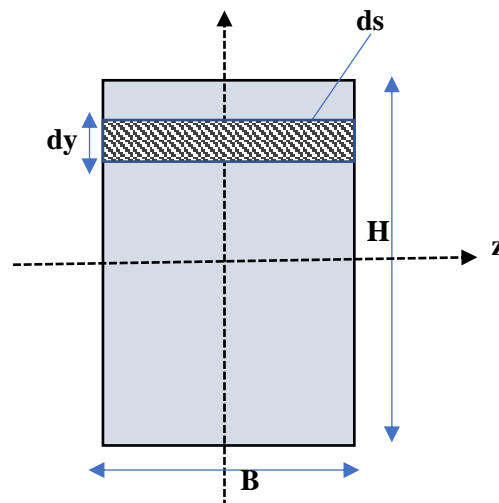
Avec  $ds = B \cdot dy$

$$I_z = \iint Y^2 B dy$$

$$I_z = B \int_{-H/2}^{H/2} Y^2 dy$$

$$I_z = B \left[ \frac{Y^3}{3} \right]_{-H/2}^{H/2}$$

$$I_z = B \left[ \frac{H^3}{24} - \frac{-H^3}{24} \right]$$



$$I_z = \frac{BH^3}{24}$$

### II.4.2 Démonstration appliquée à une surface triangulaire

$$\frac{b}{B} = \frac{H-y}{H} \quad \text{alors} \quad b = B \left( \frac{H-y}{H} \right)$$

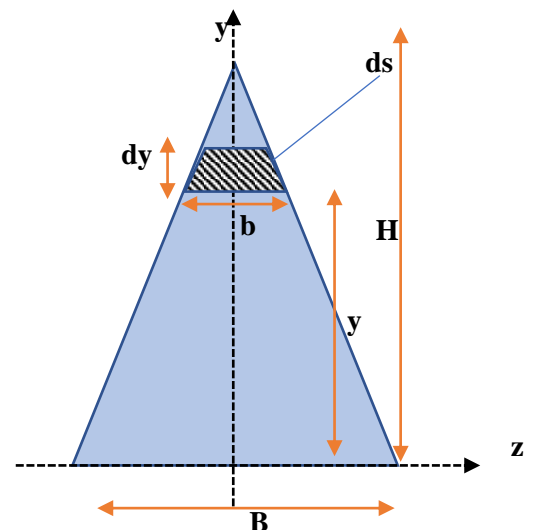
$$I_z = \iint Y^2 ds \quad \text{avec : } ds = b \cdot dy$$

$$I_z = \iint Y^2 B \left( \frac{H-y}{H} \right) dy$$

$$I_z = \frac{B}{H} \int_0^H Y^2 (H-y) dy$$

$$I_z = \frac{B}{H} \left[ \frac{Y^3 H}{3} - \frac{Y^4}{4} \right]_0^H$$

$$I_z = \frac{BH^3}{12}$$



### II.4.3 Moment d'inertie polaire

On appelle moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances  $r$  à partir du pôle.

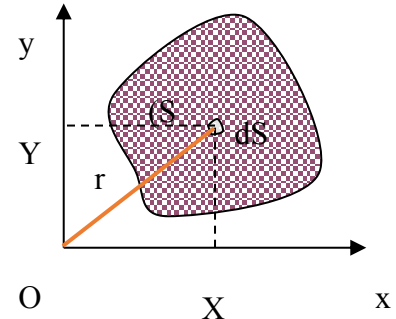
Il représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

$$I_p = \iint r^2 ds \quad r = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$I_p = \iint (X^2 + Y^2) ds$$

$$I_p = \iint X^2 ds + \iint Y^2 ds$$

$$I_p = I_x + I_y$$



De cette équation, il en résulte que le moment d'inertie polaire par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux passant par ce point.

### II.4.4 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge)

On appelle moment produit, l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées  $z, y$  :

$$I_{yz} = \iint yz ds$$

Remarques :

- Les moments d'inertie quadratiques et polaire sont toujours positifs
- Selon la disposition des axes,  $I_{zy}$  peut être positif, négatif ou nul
- En chaque point d'une aire plane, il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ( $I_{yz} = 0$ ). Les deux axes ainsi définis sont appelés axes principaux d'inertie.
- Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale, la seconde étant nécessairement orthogonale.

## II.5 Transformation des moments d'inertie

### II.5.1 Théorèmes de Huygens

Le moment d'inertie d'une surface (S) plane, par rapport à un axe  $xx'$ , est la somme des produits des surfaces élémentaires  $ds$  infiniment petites, par le carré de leur distance à cet axe.

Il est possible de se ramener au moment d'inertie pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité, à l'aide du théorème dit théorème de Huygens (ou le théorème des axes parallèles) (figure II.2) :

**Démonstration du théorème de Huygens**

Soit un élément  $dS$  de  $S$  dans le repère  $Oxy$ , et soit le repère  $Gxy$  qui passe par le centre de gravité  $G$  de  $S$  et dont les axes sont parallèles à  $Ox$  et  $Oy$ . Soit :

$$I_x = \iint_S y^2 \cdot dS \quad \text{avec } y = Y_G + y'$$

Ce qui donne :

$$I_x = \iint_S (Y_G^2 + 2 \cdot Y_G \cdot y' + y'^2) dS$$

$$I_x = Y_G^2 \iint_S dS + 2 \cdot Y_G \iint_S y' dS + \iint_S y'^2 dS$$

Finalement, on obtient :  $I_x = I_{Gx} + S \cdot Y_G^2$

De même :  $I_y = I_{Gy} + S \cdot X_G^2$

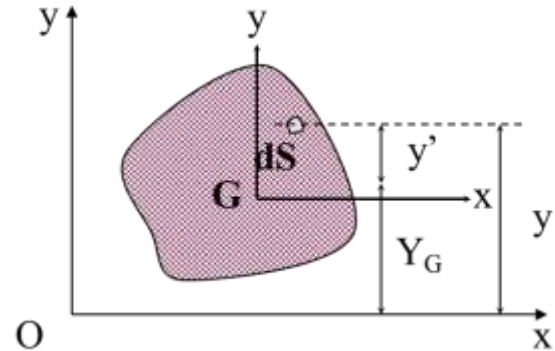


Figure II. 2 théorème de Huygens

**La formule générale du moment d'inertie**

$$I_x = \sum [I_{xi} + S_i \times (Y_G)^2]$$

$$I_y = \sum [I_{yi} + S_i \times (X_G)^2]$$

**II.5.2 Rotations d'axes :**

Soit la section plane  $S$  dont les moments d'inertie par rapport aux axes  $(x,y)$  sont connus. Un deuxième système  $OXY$  obtenu par une rotation d'angle  $\theta$ .

Les relations liant les coordonnées dans les deux repères sont :

$$X = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

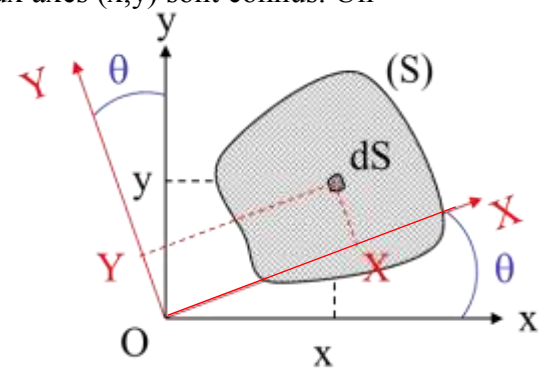
$$Y = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

Calculons le moment quadratique /  $OX$  :

$$I_x = \iint_S Y^2 dS$$

$$I_x = \iint_S (-x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta)^2 dS$$

$$I_x = \iint_S (x^2 \cdot \cos^2 \theta - 2 \cdot xy \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + y^2 \cdot \cos^2 \theta) dS$$



$$I_X = \cos^2 \theta \iint_S x^2 \cdot dS + \sin^2 \theta \iint_S y^2 dS - 2 \cdot xy \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \iint_S xy \cdot dS$$

$$I_X = \cos^2 \theta I_y + \sin^2 \theta I_x - 2 \cdot xy \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta I_{xy}$$

On a :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} ; \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} ; \quad \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

Ce qui nous donne :

$$I_X = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta - I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

De même, pour le moment quadratique / OY, on obtient :

$$I_Y = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos 2\theta + I_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

Avec  $I_{oxy}$  est le Moment quadratique par rapport à un couple d'axe :

Ce moment quadratique est aussi appelé moment produit. Pour un élément  $dS$ , le moment produit élémentaire par rapport aux axes Ox et Oy est par définition la quantité :

$$I_{xy} = \iint_S x \cdot y \cdot dS$$

Théorème de Huygens :  $I_{xy} = I_{Gxy} + S \cdot X_G \cdot Y_G$

**Remarques :**

1-Le moment produit est une grandeur algébrique

2- Si un des deux axes est un axe de symétrie pour la section alors  $I_{oxy}=0$

### II.5.3 Les directions principales

Il s'agit des directions donnant les moments quadratiques extrêmes (maximal et minimal).

Pour les trouver, dérivons  $I_{ox}$  et  $I_{oy} / \theta$  et annulons ces dérivées :

$$\frac{dI_x}{d\theta} = -2 \cdot \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta - 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0$$

$$\frac{dI_y}{d\theta} = 2 \cdot \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\theta + 2 \cdot I_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0$$

Ces deux expressions s'annulent pour :

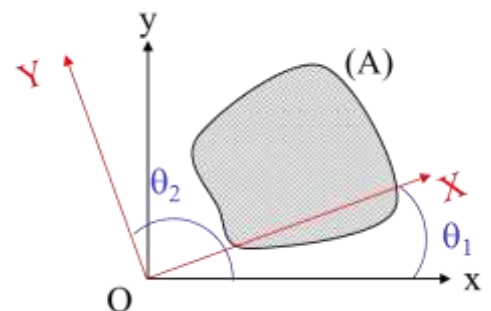
$$\tan(2\theta) = \frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Cette expression nous donne deux directions conjuguées définies

par les angles :

$$\theta_1 \text{ et } \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

Les directions ainsi déterminées s'appellent les directions principales (ou axes principaux), elles sont orthogonales et définies par la relation :





$$\tan(2\theta) = \frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Remarques :

- Pour les directions principales,  $I_{XY}$  est nul.
- Tout axe de symétrie, est axe principal d'inertie.
- Tout axe perpendiculaire à un axe de symétrie est également axe principal d'inertie.

### Expression des moments quadratiques principaux

Pour connaître les expressions des moments quadratiques principaux ( $I_{\max}$  et  $I_{\min}$ ), il suffit de remplacer, dans les formules donnant  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_{xy}$ , la valeur de  $\theta$  par les solutions de l'équation :

$$\tan(2\theta) = \frac{-2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}$$

On obtient ainsi :

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

## II.6 Module de résistance

Le module de résistance est égal au quotient du moment d'inertie axial par la distance de l'axe à la fibre la plus éloignée

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}$$

Où  $y_{\max}$  distance entre l'axe Ox et la fibre la plus éloignée.

## II.7 Rayon de giration

Le rayon de giration est un indice qui mesure la dispersion de la section autour d'un axe central. Il définit la rigidité ou la raideur d'une pièce qui est, entre autres, fonction de sa forme.

On appelle rayon de giration d'une section par rapport à un axe quelconque, la quantité donnée

par l'équation :  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

## II.8 Exercice

Déterminer les moments d'inertie principaux et centraux de la section (forme L) ci-dessous :

## Solution exercice 1

On pour  $S_1$

$S_1 = 10 \text{ cm}^2$  centre de gravite  $S_1 : Z_1 = 5 \text{ cm} \quad Y_1 = 0.5 \text{ cm}$

$$I_{Z1} = \frac{BH^3}{12} \quad I_{Z1} = \frac{1 \cdot 10^3}{12} \quad I_{Z1} = 83.33 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y1} = \frac{HB^3}{12} \quad I_{Y1} = \frac{10 \cdot 1^3}{12} \quad I_{Y1} = 0.833 \text{ cm}^4$$

On pour  $S_2$

$S_2 = 9 \text{ cm}^2$  centre de gravite  $S_2 : Z_2 = 0.5 \text{ cm} \quad Y_2 = 5.5 \text{ cm}$

$$I_{Z2} = \frac{BH^3}{12} \quad I_{Z2} = \frac{9 \cdot 1^3}{12} \quad I_{Z2} = 0.75 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y2} = \frac{HB^3}{12} \quad I_{Y2} = \frac{1 \cdot 9^3}{12} \quad I_{Y2} = 60.75 \text{ cm}^4$$

Les coordonnées du centre de gravite sont :

$$Z_g = \frac{\sum S_i \cdot Z_i}{\sum S_i} \quad Z_g = \frac{(5 \cdot 10) + (0.5 \cdot 9)}{9 + 10} \quad Z_g = 2.87 \text{ cm}$$

$$Y_g = \frac{\sum S_i \cdot Y_i}{\sum S_i} \quad Y_g = \frac{(0.5 \cdot 10) + (5.5 \cdot 9)}{9 + 10} \quad Y_g = 2.87 \text{ cm}$$

La distance entre les centres de gravite locaux et le centre de gravité de la section sont

$$a_1 = Z_1 - Z_g \quad a_1 = 2.13 \text{ cm} \quad a_2 = Z_2 - Z_g \quad a_2 = -2.37 \text{ cm}$$

$$b_1 = Y_1 - Y_g \quad b_1 = -2.37 \text{ cm} \quad b_2 = Y_2 - Y_g \quad b_2 = 2.63 \text{ cm}$$

Le moment d'inertie centraux par rapport aux axes parallèles a OY et OZ

$$I_z = \sum I_{Zi} + S_i a_i^2 \quad I_z = 83.33 + 0.75 + (10 \cdot 2.13^2) + (9 \cdot (-2.37)^2) = 180 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum I_{Yi} + S_i b_i^2 \quad I_y = 0.83 + 60.75 + (10 \cdot (-2.37)^2) + (9 \cdot 2.63^2) = 180 \text{ cm}^4$$

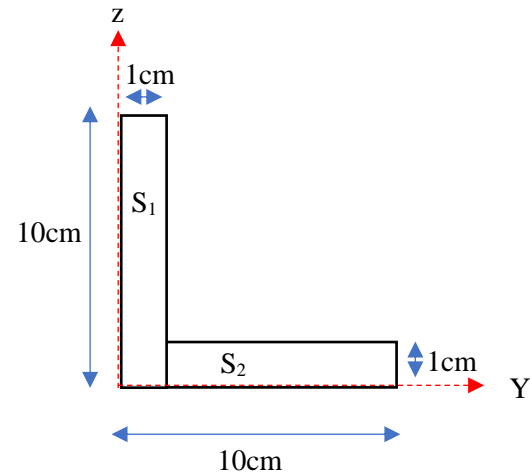
$$I_{yz} = \sum I_{YZi} + S_i a_i^2 b_i^2 \quad I_{yz} = 0 + 0 + (10 \cdot 2.13 \cdot (-2.37)) + (9 \cdot (-2.37) \cdot 2.63) = 106.6 \text{ cm}^4$$

Les moments d'inertie centraux principaux sont

$$I_{max} = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 180 + 106.6 \quad I_{max} = 286.6 \text{ cm}^4$$

$$I_{min} = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 180 - 106.6 \quad I_{min} = 73.4 \text{ cm}^4$$

L'orientation des axes principaux



$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \infty \quad \text{Alors } 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

**Exercice 02**

Déterminer les caractéristiques géométriques de la section suivante :

**Solution exercice 2**

On pour  $S_1$

$S_1 = 300 \text{ cm}^2$  centre de gravite  $S_1$  :  $X_1 = -35 \text{ cm}$   $Y_1 = 20 \text{ cm}$

$$I_{X1} = \frac{BH^3}{12} \quad I_{X1} = \frac{10 \cdot 30^3}{12} \quad I_{X1} = 22500 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y1} = \frac{HB^3}{12} \quad I_{Y1} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} \quad I_{Y1} = 2500 \text{ cm}^4$$

On pour  $S_2$

$S_2 = 800 \text{ cm}^2$  centre de gravite  $S_2$  :  $X_2 = 0 \text{ cm}$   $Y_2 = 0 \text{ cm}$

$$I_{X2} = \frac{BH^3}{12} \quad I_{X2} = \frac{80 \cdot 10^3}{12} \quad I_{X2} = 6666.66 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y2} = \frac{HB^3}{12} \quad I_{Y2} = \frac{10 \cdot 80^3}{12} \quad I_{Y2} = 426666.66 \text{ cm}^4$$

On pour  $S_3$

$S_3 = 300 \text{ cm}^2$  centre de gravite  $S_3$  :  $X_3 = 35 \text{ cm}$   $Y_3 = -20 \text{ cm}$

$$I_{X3} = \frac{BH^3}{12} \quad I_{X3} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} \quad I_{X3} = 22500 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y3} = \frac{HB^3}{12} \quad I_{Y3} = \frac{10 \cdot 30^3}{12} \quad I_{Y3} = 2500 \text{ cm}^4$$

Les coordonnées du centre de gravité sont :

$$X_g = \frac{\sum S_i \cdot X_i}{\sum S_i} \quad X_g = \frac{(-35 \cdot 300) + (0 \cdot 800) + (35 \cdot 300)}{300 + 800 + 300} \quad X_g = 0 \text{ cm}$$

$$Y_g = \frac{\sum S_i \cdot Y_i}{\sum S_i} \quad Y_g = \frac{(20 \cdot 300) + (0 \cdot 800) + (-20 \cdot 300)}{300 + 800 + 300} \quad Y_g = 0 \text{ cm}$$

La distance entre les centres de gravité locaux et le centre de gravité de la section sont

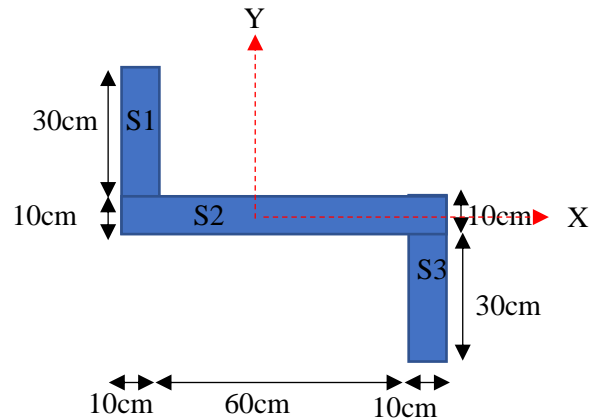
$$a_1 = X_1 - X_g \quad a_1 = -20 \text{ cm} \quad a_2 = X_2 - X_g \quad a_2 = 0 \text{ cm} \quad a_3 = X_3 - X_g \quad a_3 = 20 \text{ cm}$$

$$b_1 = Y_1 - Y_g \quad b_1 = 35 \text{ cm} \quad b_2 = Y_2 - Y_g \quad b_2 = 0 \text{ cm} \quad b_3 = Y_3 - Y_g \quad b_3 = -35 \text{ cm}$$

Le moment d'inertie centraux par rapport aux axes parallèles a OY et OX

$$I_x = \sum I_{Xi} + S_i a_i^2 \quad I_x = 22500 + 6666.66 + 22500 + (300 \cdot 20^2) + (300 \cdot (-20)^2) = 291666.66 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum I_{Yi} + S_i b_i^2 \quad I_y = 2500 + 426666.66 + 2500 + (300 \cdot 35^2) + (300 \cdot (-35)^2) = 1166666.66 \text{ cm}^4$$



$$I_{XY} = \sum I_{YXi} + S_i a_i^2 b_i^2 \quad I_x = 0 + 0 + 0 + (300 \cdot 35 \cdot (-20)) + (300 \cdot (-35) \cdot 20) = -420000 \text{ cm}^4$$

Les moments d'inertie centraux principaux sont

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 729166.66 + 606470.3208 \quad I_{max} = 1335636.981 \text{ cm}^4$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 729166.66 - 606470.3208 \quad I_{min} = 122696.3392 \text{ cm}^4$$

L'orientation des axes principaux

$$\tan(2\theta) = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot 420000}{I_x - I_y} \quad \text{Alors } 2\theta = 0.76 \text{ rad} = 43.83 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

## Chapitre III

---

# Traction simple et compression simple

---

- Définitions,
- Efforts normaux de traction et de compression,
- Contrainte normale,
- Déformation élastique,
- Loi de Hooke,
- Module de Young,
- Diagramme contrainte-déformation,
- Condition de résistance et notion de contrainte admissible.

### III.1 Définitions,

Une poutre droite est sollicitée en traction ou compression chaque fois que les actions à ses extrémités (A et B) se réduisent à deux forces égales et opposées, de direction la ligne moyenne.

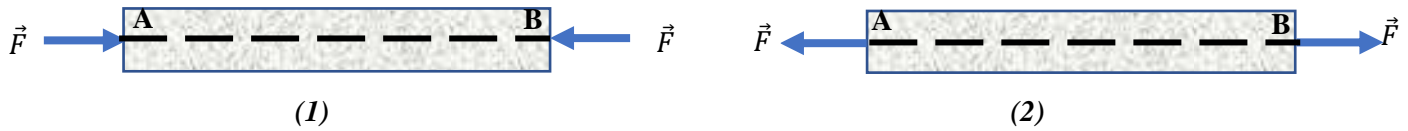


Figure III. 1 Barre sollicitée en : (1) compression (2) traction

- (1) Un effort de compression simple si les forces tendent à raccourcir la barre.
- (2) Un effort de traction simple si les forces tendent à allonger la barre,

### III.2 Efforts normaux de traction et de compression

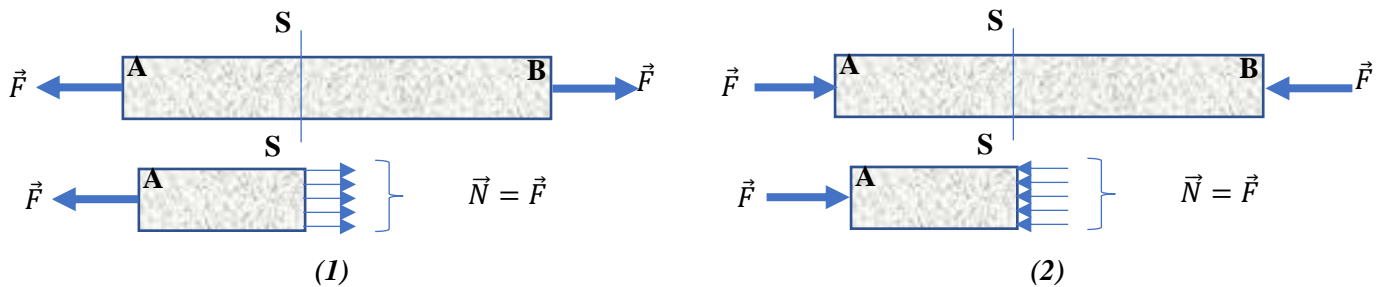


Figure III. 2 Barre sollicitée en : (1) compression (2) traction

D'après le principe de l'action et de la réaction, au niveau de la section S, il apparaît une force intérieure égale et opposée à  $\mathbf{F}$ .

En traction la force normal  $N=F$  est dirigée de l'intérieur vers l'extérieur. Contrairement à la compression pour laquelle la force normal  $N$  est dirigée de l'extérieur vers l'intérieur.

La force normal  $N$  est égal à la résultante de toutes les forces intérieures agissant sur la section (voire figure III.2).

La contrainte normale «  $\sigma$  » : est la composante de l'effort qui agisse perpendiculairement à la surface considérée :  $\sigma = \frac{N}{A}$

$\sigma$  : est appelé contrainte normale. Elle représente l'intensité de l'effort normal par unité de surface.  $\sigma$  se mesure en (N/mm<sup>2</sup>) ou Mégapascal (MPa).

### III.3 L'essai de Traction :

Nous considérerons une éprouvette en acier *doux* (figure III.3).

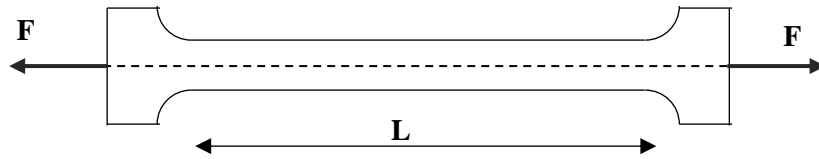


Figure III. 3 éprouvette en acier doux

L'éprouvette est un cylindrique, muni de deux têtes insérées entre les mâchoires de la machine d'essai de traction. Cet essai peut comporter l'observation des variations de dimensions longitudinales et transversales dans le domaine élastique et dans le domaine plastique, et être poursuivi jusqu'à la rupture.

Lorsque l'on exerce un effort de traction  $F$  sur l'éprouvette, on produit sur la partie centrale de l'éprouvette un champ de contraintes de traction simple considéré uniforme. La contrainte de l'élément de surface unité est donc une contrainte normale de valeur :

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

A l'aide de comparateurs on mesure l'allongement  $\Delta L$  de la partie centrale de l'éprouvette. Par la suite, on considère plus particulièrement l'allongement relatif :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

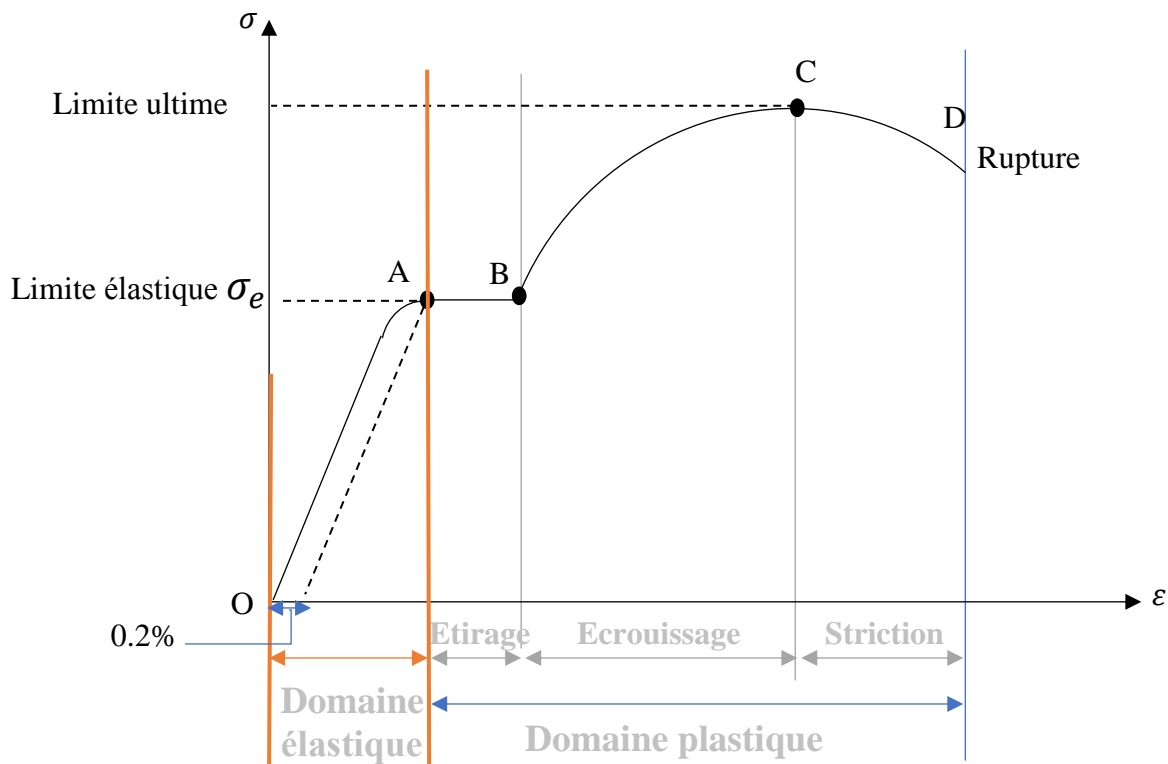


Figure III. 4 Diagramme d'essai de traction.

En reportant sur un graphique les résultats de l'essai, on trouve, pour l'acier doux, une courbe (figure III.4).

L'abscisse représente l'allongement relatif  $\epsilon$ , l'ordonnée la contrainte normale  $\sigma$ .

Après l'analyse de la courbe contrainte-déformation, on distingue deux zones différentes présentées par :

Zone (OA) présente la partie droite et linéaire de la courbe contrainte-déformation, il est clair que l'allongement d'éprouvette est proportionnel à la progression de la force appliquée  $F$ , cette zone est appelée le domaine élastique du matériau, car dans le cas de décharge, le matériau revient à sa configuration initiale. En conséquence, on peut tirer une information importante, la relation entre les contraintes et les déformations est linéaire et proportionnelle, cette signification permet d'exprimer une loi physique, notée la **loi d'Hooke**, qu'elle est présentée par :

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

- : La pente  $E$  de la droite (OA) est appelée **module d'élasticité** linéaire ou **module de Young** notée ( $E$ )
- La loi d'Hooke  $\sigma = E \cdot \epsilon$

Le niveau « A » présente la limite élastique caractérisée par la valeur maximale de la contrainte élastique du matériau  $\sigma_e$ , au-delà de cette limite, il commence à se produire des déformations permanentes.

La zone ABCD : présente la partie non linéaire de la courbe contrainte-déformation, et dite aussi l'état plastique du matériau, cette zone est divisée en :

- La zone AB « **Etirage** », dans cette zone, on remarque que les déformations augmentent mais les contraintes restent stables jusqu'au point B, il y a aussi le durcissement du matériau et les déformations permanentes commencent à apparaître.
- La zone BC, cette zone est caractérisée par l'écrouissage du matériau dont le matériau perd ses caractéristiques élastiques, dans le cas de décharge le matériau subit un allongement supplémentaire ou permanent, on constate aussi que les déformations plastiques augmentent aussi en fonction de la progression de la contrainte appliquée.
- La zone CD, dans cette zone on constate que la diminution de la contrainte est accompagnée par une augmentation des déformations plastiques, à ce stade, la



section transversale de l'éprouvette commence à diminuer et l'apparition de déformations plastiques locales est aussi observée, le phénomène relevé dans cette zone c'est la striction qui est définie par la réduction de la section précédente à la rupture ou la ruine de l'éprouvette.

- Le point D ; présente la rupture de l'éprouvette ou la cassure totale et la destruction de toute l'éprouvette.

### III.4 Coefficient de Poisson

On peut aussi exprimer la relation entre la déformation transversale et longitudinale par le coefficient  $\nu$  qui s'appelle **coefficient de Poisson** :

$$\nu = \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}}$$

Cette valeur du rapport entre la déformation transversale  $\epsilon_{yy}$  et la déformation axiale  $\epsilon_{xx}$  correspondante à la contrainte axiale uniformément répartie dans les limites de la proportionnalité du matériau.

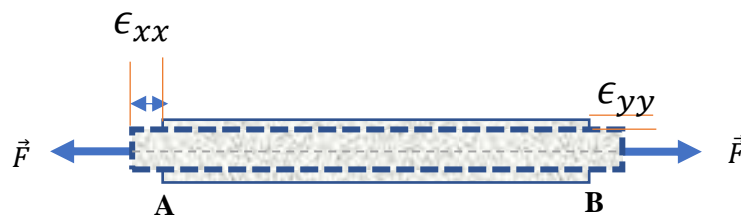


Figure III. 5 Coefficient de Poisson

A partir du module d'élasticité  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , est défini un autre module ayant la dimension d'une contrainte :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ce module apparaît dans le calcul des contraintes de cisaillement. Il est appelé module d'élasticité transversal.

### III.5. Déformation élastique

On prend une barre ou poutre sollicitée par une force de traction ou compression, on

applique la loi de Hooke :  $\sigma = E \epsilon$  avec  $\sigma = \frac{N}{A}$  alors  $\epsilon = \frac{N}{E A}$

Cette quantité présente la déformation axiale de la poutre/barre en traction ou compression ;

On a aussi  $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$  alors on trouve finalement que l'allongement  $\Delta L$  égal à :  $\Delta L = \frac{LN}{EA}$

### III.6 Condition de résistance et notion de contrainte admissible

#### III.6.1 Notion de coefficient de sécurité

Pour des raisons de sécurité la contrainte  $\sigma$  doit rester inférieure à une valeur limite appelé contrainte pratique à l'extension, en adoptant un coefficient  $S$  appelé coefficient de sécurité tel que  $Rpe = \frac{Re}{S}$ , D'où la condition de résistance d'une pièce

en traction :  $\sigma \leq Rpe$

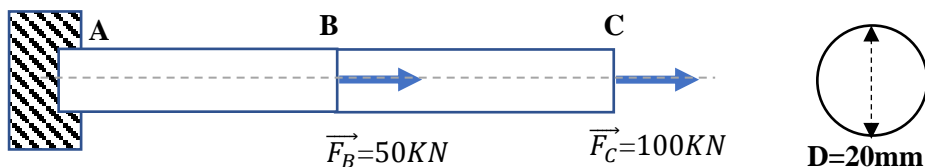
Les coefficients de sécurité varient suivant les règlements et suivant la nature envisagée pour les sollicitations (état-limite ultime ou état-limite de service).

### III.7 Exercices

#### Exercice 1

Soit un système composé de deux arbres AB et BC,

1. Calculer la contrainte normale qui s'exerce dans chaque membrure lorsque la force  $F_B = 50 \text{ KN}$  et la force  $F_C = 100 \text{ KN}$ .
2. Traces les diagrammes des efforts normaux  $N$  et des contraintes  $\sigma$ .



#### Solution exercice 1

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_A + F_b + F_c = 0 \quad R_A + 50 + 100 = 0$$

$$R_A = -150 \text{ KN.}$$

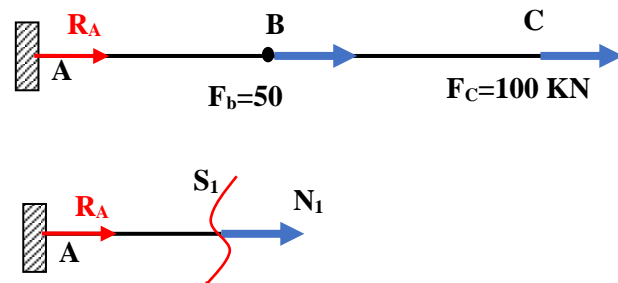
#### Zone AB :

L'effort normal  $N_1$

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_A + N_1 = 0 \quad N_1 = 150 \text{ KN}$$

Contrainte  $\sigma_1$  :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} \quad \text{Avec} \quad A = \frac{\pi D^2}{4} \quad \sigma_1 = \frac{4N_1}{\pi D^2} \quad \sigma_1 = \frac{4 \cdot 150}{3.14 \cdot 20^2} \quad \sigma_1 = 477.70 \text{ MPa}$$

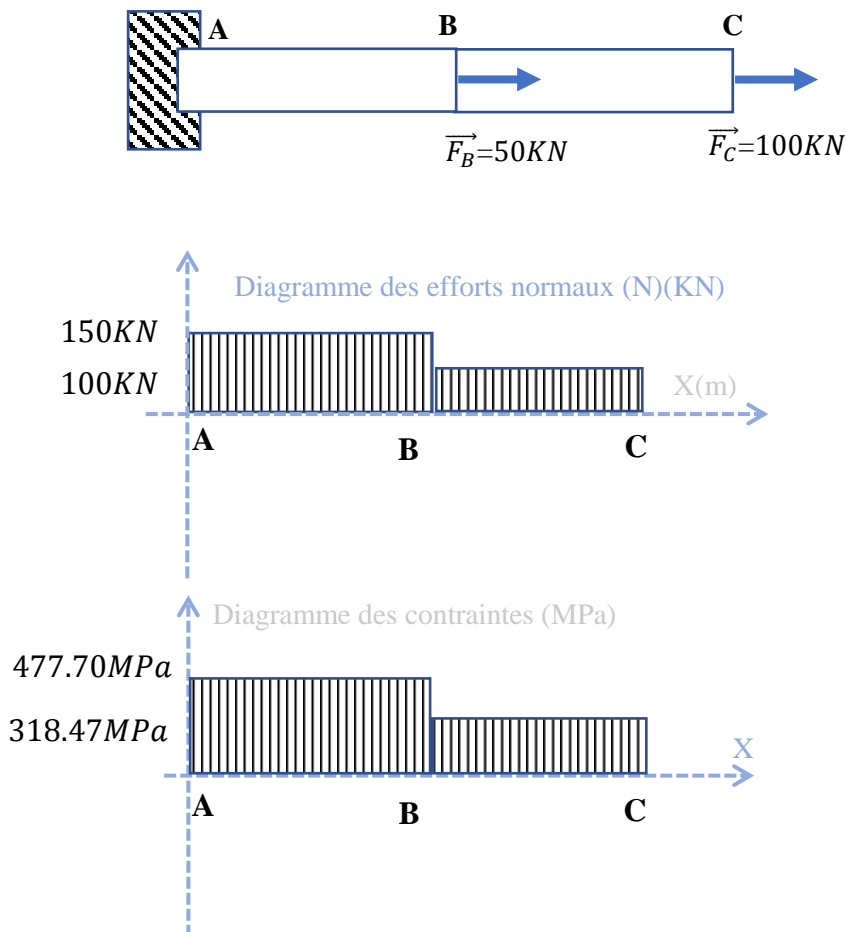


**Zone AB :**L'effort normal  $N_1$ 

$$\Sigma F_x = 0 \quad R_A + F_B + N_2 = 0 \quad N_2 = 100 \text{ KN}$$

Contrainte  $\sigma_2$  :

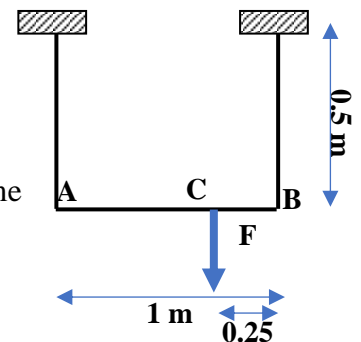
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} \quad \text{Avec} \quad A = \frac{\pi D^2}{4} \quad \sigma_2 = \frac{4N_2}{\pi D^2} \quad \sigma_2 = \frac{4 \cdot 100}{3.14 \cdot 20^2} \quad \sigma_2 = 318.47 \text{ MPa}$$

Les diagrammes des efforts normaux  $N$  et des contraintes  $\sigma$ .**Exercice 02**

Soit une barre rigide AB suspendue aux deux extrémités par des câbles extensibles et supporte une charge concentrée au point C ( $F=1 \text{ kN}$ ),

- 1- déterminer l'allongement total de câbles
- 2- déterminer la position de la force F pour que les deux câbles ont le même allongement.

Données :  $E=20 \text{ GPa}$ ,  $\Phi_1=5 \text{ mm}$ ,  $\Phi_2=4 \text{ mm}$ ,  $L_{\text{barre}}=1 \text{ m}$ ,  $L_{\text{cable}}=0.5 \text{ m}$

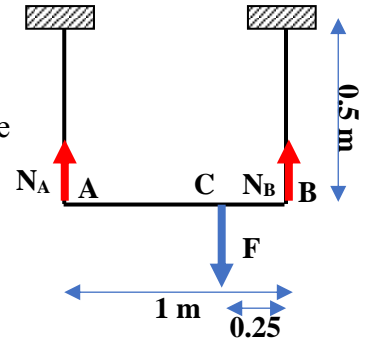


**Solution exercice 2****1-Détermination de l'allongement total de câbles**

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\Sigma F_x = 0 \quad -F + N_A + N_B = 0 \quad N_A + N_B = 1 \text{ KN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad (N_B * 1) - (1 * 0.75) = 0 \quad N_B = 0.75 \text{ KN} \text{ alors } N_A = 0.25 \text{ KN}$$



- On a l'allongement  $\Delta l$  égal à :  $\Delta l = \frac{LN}{EA}$

**Pour le câble 1 :**

$$\Delta l_1 = \frac{LN_A}{EA_1} \text{ avec } A = \frac{\pi \phi_1^2}{4}$$

$$\Delta l_1 = \frac{4LN_A}{E\pi\phi_1^2} \quad \Delta l_1 = \frac{4 * 0.5 * 10^3 * 0.25 * 10^3}{20 * 10^3 \pi * 5^2} \quad \Delta l_1 = 0.318 \text{ mm.}$$

**Pour le câble 2 :**

$$\Delta l_2 = \frac{LN_B}{EA_2} \text{ avec } A = \frac{\pi \phi_1^2}{4}$$

$$\Delta l_2 = \frac{4LN_B}{E\pi\phi_2^2} \quad \Delta l_2 = \frac{4 * 0.5 * 10^3 * 0.75 * 10^3}{20 * 10^3 \pi * 4^2} \quad \Delta l_2 = 1.492 \text{ mm.}$$

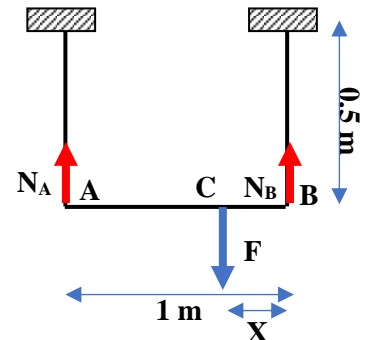
**2- La position de la force F (X)**

Les deux câbles ont le même allongement  $\Delta l_1 = \Delta l_2$

$$\frac{LN_A}{EA_1} = \frac{LN_B}{EA_2} \quad \text{Alors } N_A = \frac{A_1}{A_2} N_B \quad N_A = \frac{\phi_1^2}{\phi_2^2} N_B$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 & \quad -(N_A * 1) + (F * X) = 0 & X - N_A &= 0 \\ \Sigma M_A = 0 & \quad (N_B * 1) - (F * (1 - X)) = 0 & X + N_B - 1 &= 0 \\ & & N_A &= \frac{25}{16} N_B \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} X - N_A = 0 \\ X + N_B - 1 = 0 \\ N_A = \frac{25}{16} N_B \end{array} \right\} \quad X = 0.609 \text{ m}$$



## Chapitre VI

---

# Flexion simple

---

- Définitions et hypothèses,
- Efforts tranchants,
- Moments fléchissant,
- Relation différentielle entre la charge, Effort tranchant et Moment fléchissant.
- Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant,
- Contraintes en flexion simple,
- Notion de l'axe neutre et dimensionnement.
- Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche),
- Calcul de la contrainte tangentielle

### IV.1 Définitions

On considère une poutre de longueur  $L$  soumise à l'action des charges latérales, ce chargement provoque une déformation latérale nommée *flèche*, et l'action mécanique dite *flexion*, donc la flexion signifie les déformations latérales d'un élément de structure sous chargement latéral et perpendiculaire à la fibre moyenne de l'élément étudié.

Après l'analyse du diagramme des moments fléchissant, on observe deux cas, pour le cas où le diagramme du moment est uniforme et constant, il s'agit de flexion pure. Avec la présence d'une variation non constante du moment, on parle de flexion simple.

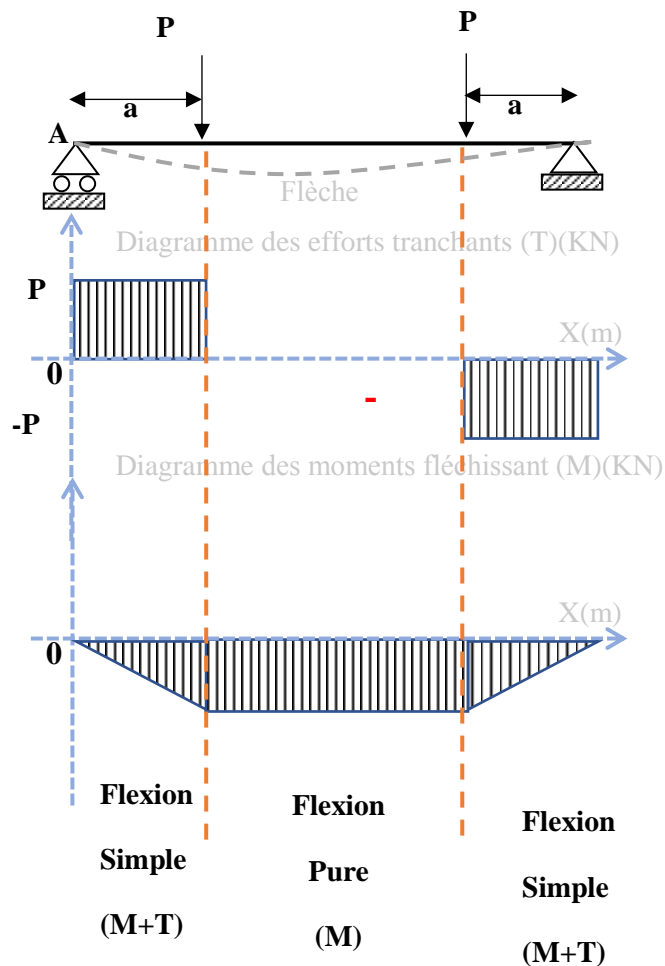


Figure IV. 1 flexion simple et flexion pure

## IV.2 Hypothèses à la flexion plane simple

- La ligne moyenne de la poutre est rectiligne.
- La section droite de la poutre est constante.
- La poutre admet un plan de symétrie longitudinal.
- Le moment de flexion agit dans le plan de symétrie.
- Les forces appliquées sont perpendiculaires à la ligne moyenne (situées dans le plan de symétrie longitudinal).
- Les déformations sont petites (domaine élastique).
- Les sections transversales planes restent planes à près déformation.

*Note : Ces hypothèses sont additionnées à celles de la RDM.*

## IV.3 Essai de flexion

L'essai de flexion consiste à disposer une poutre sur des appuis appliquée une charge  $F$  et placé un comparateur en dessous de la poutre pour mesurer les déformations. La poutre lorsqu'on lui applique une charge  $F$  dans le sens voir la figure VI.1. Elle va se déformer suivant cette figure. La déformation subite par la poutre on l'appelle la flèche. On remarque aussi que la moitié inférieure de la poutre les fibres seront tendues (phénomène de traction). La moitié supérieure de la poutre les fibres seront comprimées (phénomène de compression). La flèche dépend de quatre facteurs :

- La norme de la charge
- La position de la charge
- La forme et le matériau de la poutre
- La longueur de la poutre

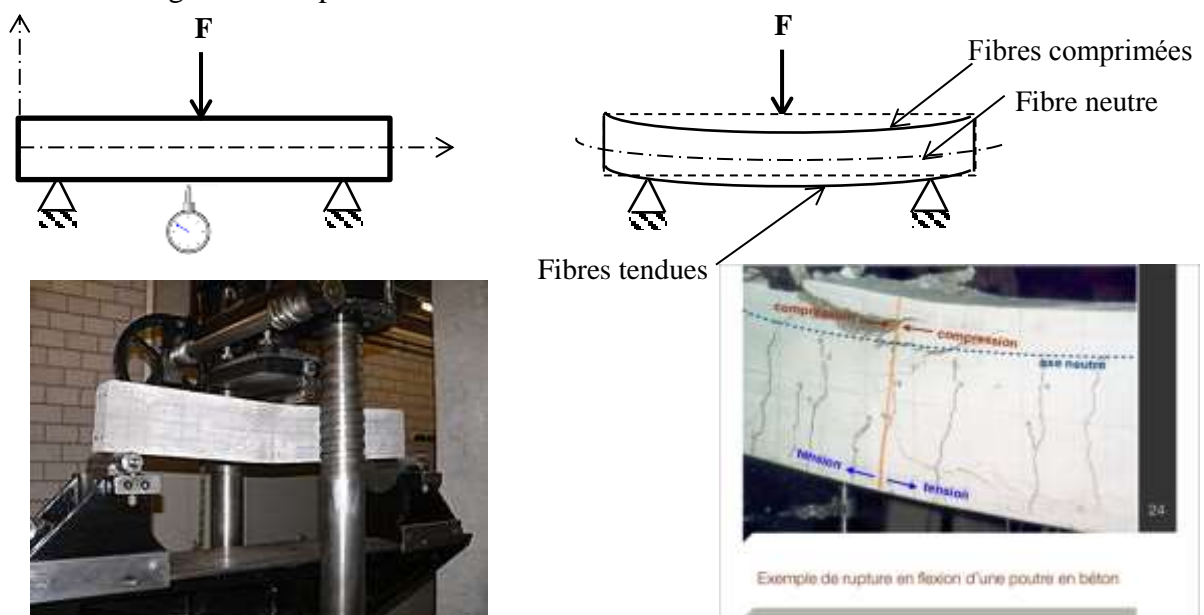


Figure IV. 2 Essai de la flexion

#### IV.4. Efforts tranchants, et Moments fléchissant

##### IV.4.1 Effort tranchant

L'effort tranchant  $T$  dans la section  $\Sigma$  est égal à la somme algébrique des projections sur l'axe des  $y$  de toutes les forces agissant sur la partie de la poutre située à gauche de la section  $\Sigma$  (figure VI.3).

##### VI.4.2 Moment fléchissant

Le moment fléchissant  $M$  dans la section  $\Sigma$  est égal à la somme algébrique des moments créés dans cette section par toutes les sollicitations agissant sur le tronçon à gauche de  $\Sigma$  (figure VI.3) .

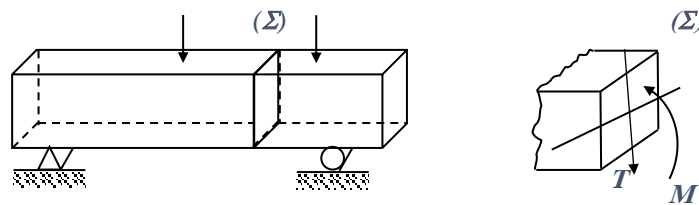


Figure IV. 3 Efforts tranchants, et Moments fléchissant

#### IV.5 Relation différentielle entre la charge, Effort tranchant et Moment fléchissant.

Pour illustrer la relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant, on considère élément infinitésimal de la poutre délimité par deux sections droites ;

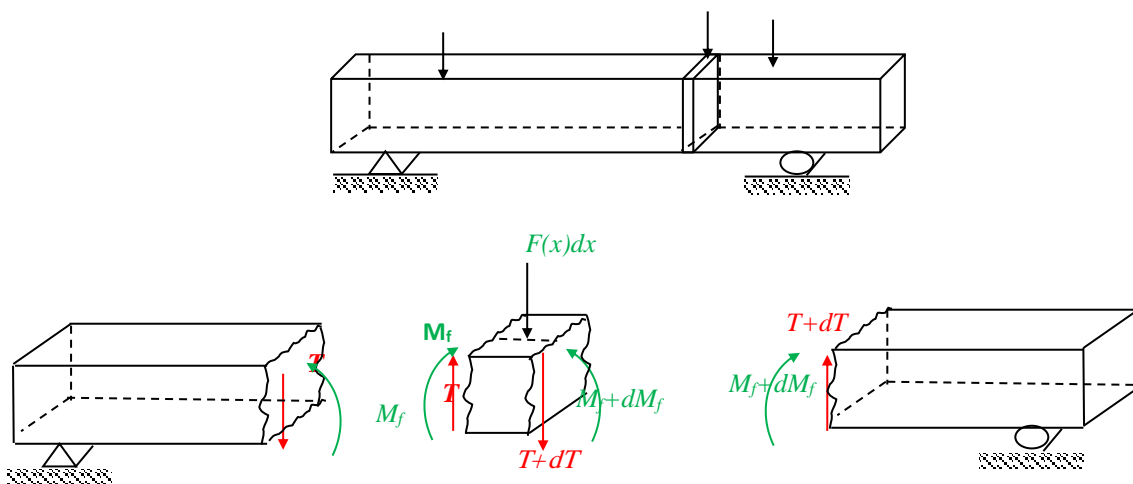


Figure IV. 4 Efforts tranchants, et Moments fléchissant



On cherche l'équilibre au voisinage de cet élément, donc on trouve :

$$\sum F_y = 0$$

$$-(T + dT) + T + F(x)dx = 0$$

$$F(x) = \frac{dT}{dx}$$

L'équilibre des moments autour l'axe (Oz) :

$$\sum M_A = 0$$

$$(M_f + dM_f) - M_f - (T + dT)dx + F(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

$$(M_f + dM_f) - M_f - Tdx - dTdx + F(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

$$dM_f - Tdx = 0$$

$$dM_f = Tdx$$

$$T = \frac{dM_f}{dx}$$

#### IV.6 Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant,

L'objectif du tracé ces diagrammes c'est pour avoir la répartition des contraintes et d'anticiper la valeur du moment où la poutre va se détériorer.

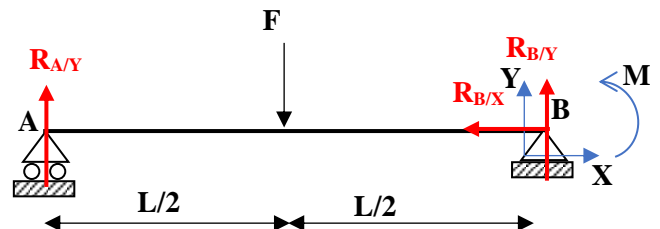
On prend les exemples suivants :

##### 1-Charge concentrée à mi-travée :

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} R_{B/x} = 0 \\ +R_{A/y} + R_{B/y} - F = 0 \\ (R_{B/y} * L/2) - (F * L) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R_{B/x} = 0.} \\ \mathbf{R_{A/y} = F/2} \\ \mathbf{R_{B/y} = F/2} \end{array} \right.$$



## 2. Calcul des efforts internes

### Zone 1 : $0 < X < L/2$

On applique le principe de la statique dans le tronçon gauche de la section S1

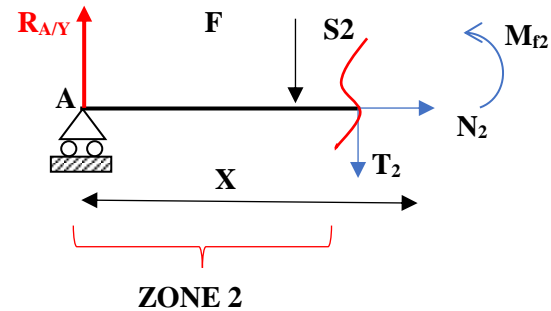
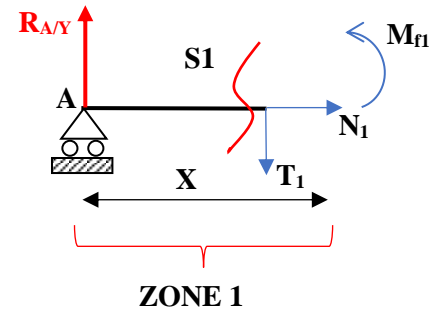
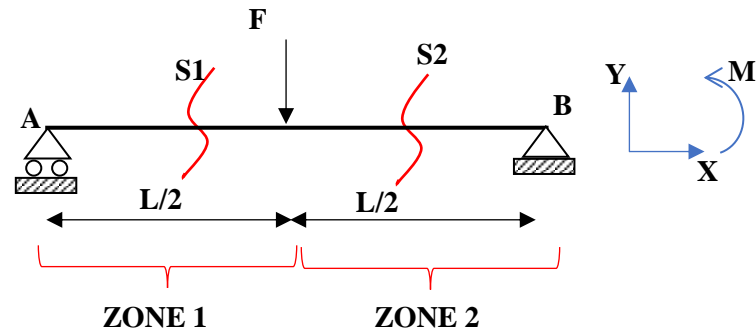
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S1} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_1 = 0 \\ R_{A/y} - T_1 = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + M_{f1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ T_1 = +R_{A/y} \\ M_{f1} = R_{A/y} * X \end{cases} \begin{cases} N_1 = 0 \\ T_1 = +F/2 \\ M_{f1} = F * X/2 \end{cases}$$

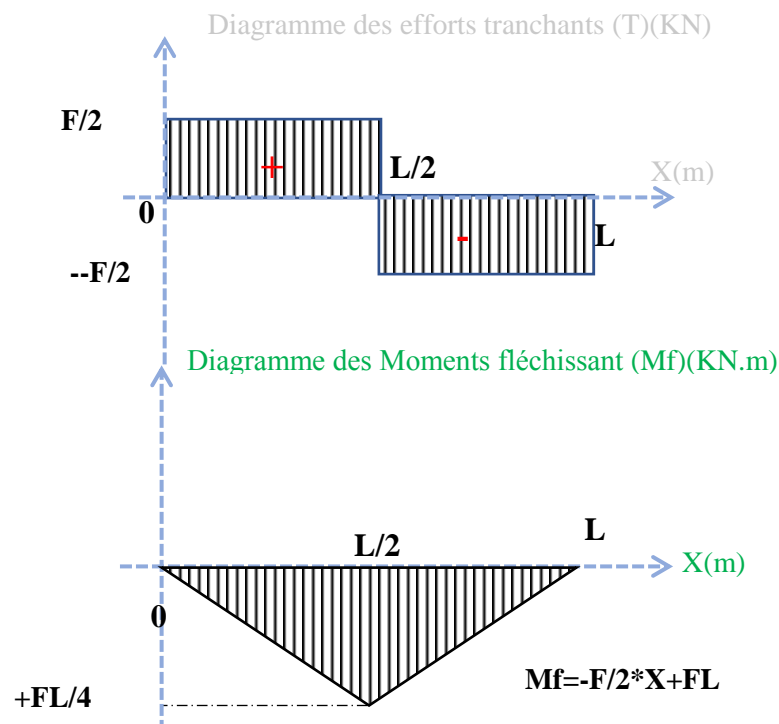
### Zone 2 : $L/2 < X < L$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S2} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_2 = 0 \\ R_{A/y} - F - T_2 = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + (F * (X - L/2)) + M_{f2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 = 0 \\ T_2 = +F/2 - F \\ M_{f2} = R_{A/y} * X - (F * (X - L/2)) \end{cases} \begin{cases} N_2 = 0 \\ T_2 = -F/2 \\ M_{f2} = -F/2 * X + FL/2 \end{cases}$$

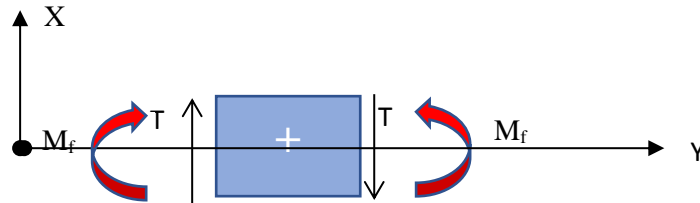


## 1- Les diagrammes des efforts internes



Ces représentations sont utiles pour situer rapidement les sections les plus sollicitées  
Une fois une l'orientation de l'abscisse curviligne définie, il existe différentes conventions d'orientation. Nous utiliserons la suivante :

- L'effort normal est positif en traction ;
- L'effort tranchant est positif lorsqu'il directement orthogonal à l'effort normal positif
- Le moment fléchissant est positif lorsqu'il tend la fibre inférieure.

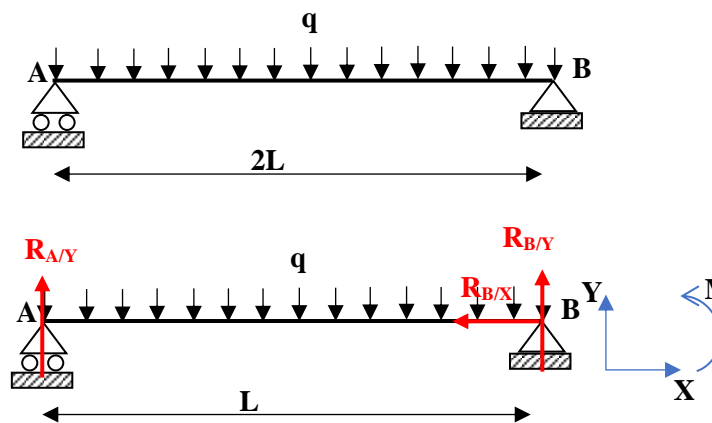


## 2-Charge uniformément répartie :

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} R_{B/x} = 0 \\ +R_{A/y} + R_{B/y} - qL = 0 \\ (R_{B/y} * L) - (qL^2/2) = 0 \end{array} \right.$$

**$R_{B/x} = 0$ .**  
 **$R_{A/y} = ql/2$ .**  
 **$R_{B/y} = ql/2$ .**



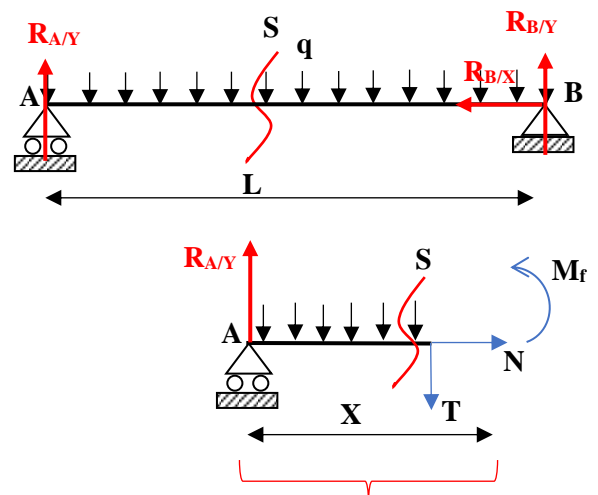
## 2. Calcul des efforts internes

### Zone 1 : 0 < X < L

On applique le principe de la statique dans le tronçon gauche de la section S1

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_S = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ R_{A/y} - T - qX = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + (qX^2/2) + M_f = 0 \end{array} \right.$$

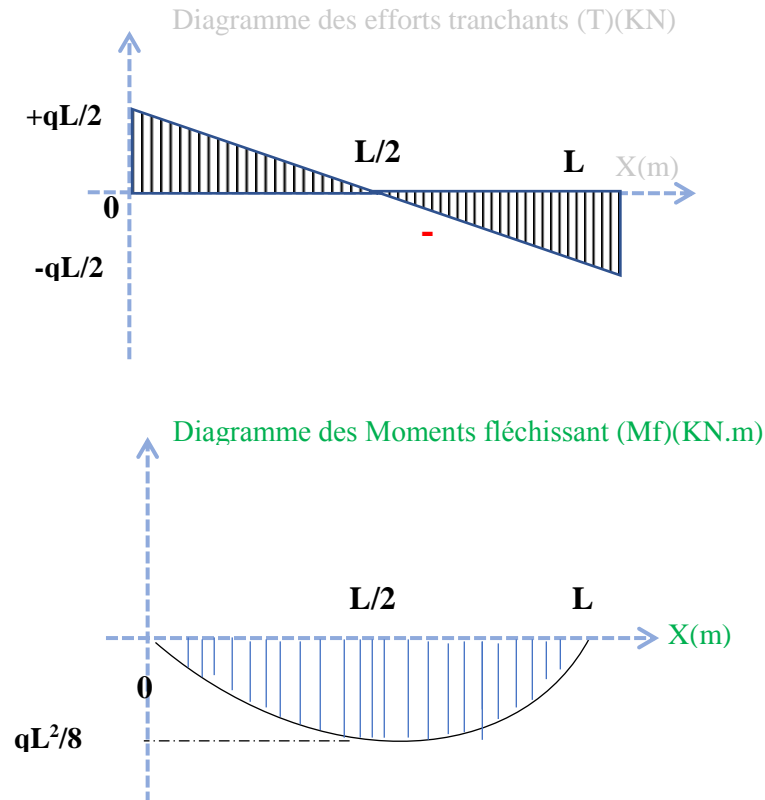
**$N = 0$**   
 **$T = +qL/2 - qX$**   
 **$M_f = qL * X/2 - qX^2/2$**



$$T(0) = qL/2 \quad M_f(L) = -qL/2 \dots \dots T = 0 \quad x = L/2$$

$$M_f(0) = 0 \quad M_f(L) = 0 \dots \dots M_f \max(L/2) = qL^2/8$$

### 1- Les diagrammes des efforts internes



#### IV.7 Contraintes en flexion simple,

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La figure montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure  $R$  et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance  $y$  de l'axe neutre peut être écrit :

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx}$$

Avec  $dx = R d\theta$   $\varepsilon = \frac{y}{R}$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{Loi de Hook}$$

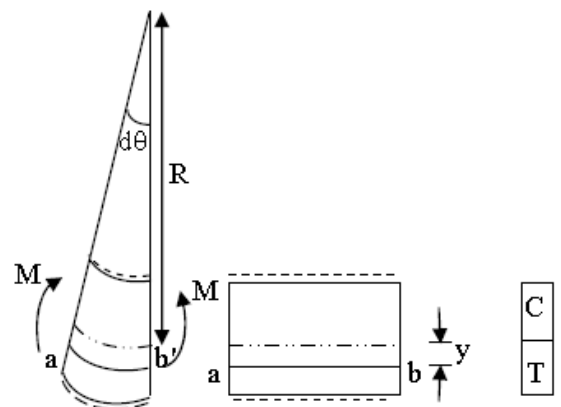


Figure IV. 5 contraintes normales

Alors  $\sigma = \frac{E}{R} y$

D'après la figure, on peut distinguer que les contraintes internes sont statiquement équivalentes à la forces et moments extérieurs. Donc :

$$\sum M_{/G} = 0 \gg M_f - \int_s \sigma y ds = 0$$

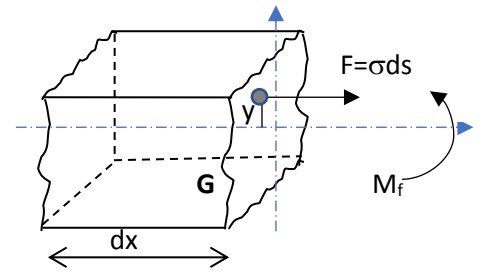


Figure IV. 6 Contrainte normale

$$M_f = \int_s \sigma y ds$$

On remplace la contrainte normale par sa valeur ;

$$M_f = \int_s \frac{E}{R} y^2 ds$$

$$M_f = \frac{E}{R} \underbrace{\int_s y^2 ds}$$

Moment d'inertie sur Oz

$$M_f = \frac{E}{R} I_z$$

On remplace la valeur du moment dans l'équation de contrainte, on trouve l'expression de la contrainte normale en un point quelconque dans la section droite S d'une distance y par rapport à l'axe

$$\sigma = \frac{M_f}{I_z} y$$

On constate que :

- La contrainte normale de la flexion est proportionnelle à la distance y entre ce point et le plan moyen passant par le centre de gravité G.

- les contraintes normales positives se sont des contraintes de traction et la zone subit ces contraintes on l'appelle, zone tendue, les contraintes négatives sont des contraintes de compression et la zone correspondante à ces contraintes, on l'appelle zone comprimée

- les zones les plus sollicitées (traction ou compression) se trouvent dans la fibre supérieure ou inférieure.

### IV.8 Notion de l'axe neutre

L'axe neutre signifie le plan où les contraintes s'annulent.

#### Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal

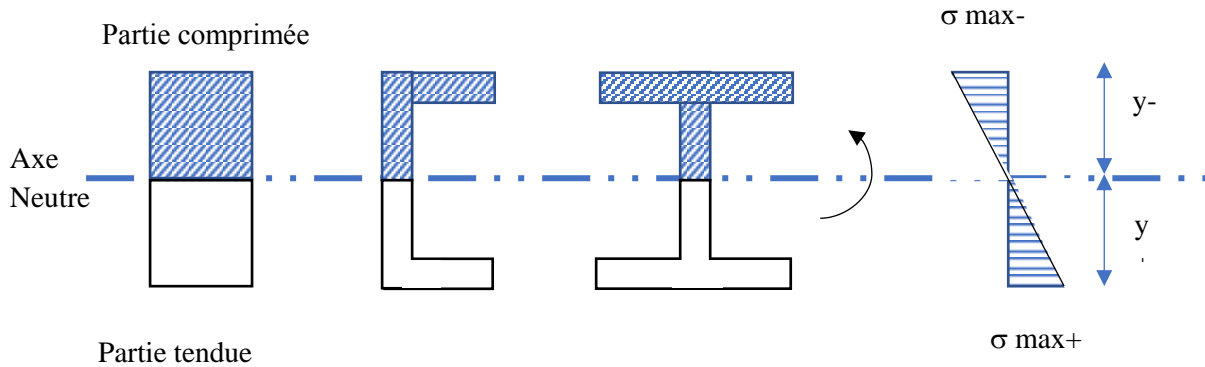


Figure IV. 7 Axe neutre

Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes

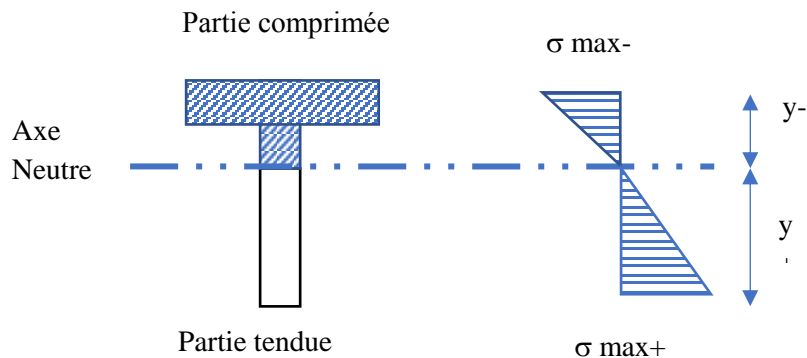


Figure IV. 8 Axe neutre

### IV.9 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche),

Lorsqu'une poutre soumise à la flexion simple, elle prend une forme courbe. La partie supérieure se raccourcit et que la partie inférieure s'allonge.

La flèche présente le déplacement transversal d'un point quelconque le long de la poutre sous l'action des charges qui la sollicitent à la flexion, la détermination de la flèche offre la possibilité de dimensionner l'élément structurel ou pour vérifier les conditions de sécurité définies par la flèche admissible ou maximale.

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant :

On a

$$\sigma = \frac{E}{R} y \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{M_f}{I} y$$

Alors

$$\frac{M_f}{EI} = \frac{1}{R}$$

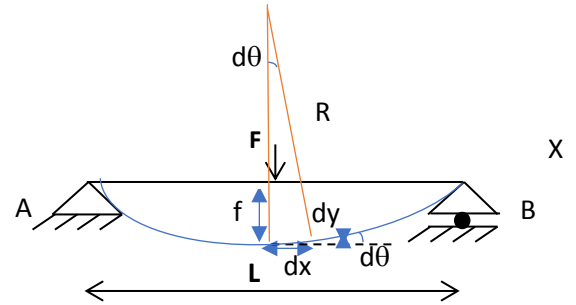
on a aussi

$$\tan(d\theta) = d\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = R d\theta \dots \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{M_f}{EI} = \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{M_f}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$



Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la flèche, dans ce cours on s'intéresse principalement par la méthode d'intégration directe. Cette méthode est basée sur l'intégration directe de l'équation différentielle pour déterminer la flèche ou la rotation :

$$y''(x) = \frac{M_f(x)}{EI}$$

1<sup>ère</sup> intégration :

$$y'(x) = \int_0^x \frac{M_f(x)}{EI} dx + C$$

En intégrant une seconde fois il vient :

$$y(x) = \int_0^x \left[ \int_0^x \frac{M_f(x)}{EI} dx + C \right] dx + C1$$

Où  $C$  et  $C1$  sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites. Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de  $M$  dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration.

Type d'appui	La flèche	La rotation
Appui simple,	$y=0$	$\theta \neq 0$
Encastrement	$y=0$	$\theta=0$

Il existe autres méthode tel que :

- METHODE DE LA POUTRE CONJUGUEE (FICTIVE)
- METHODES DES PARAMETRES INITIAUX (MacAulay)
- SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

#### IV.10 Calcul de la contrainte tangentielle.

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire sont associées des contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales (réciprocité des contraintes tangentielles). L'existence de ces contraintes suivant les couches horizontales de la poutre peut être démontrée par superposition de deux poutres de hauteur  $h$  simplement appuyées aux extrémités et soumises à une force concentrée à mi-travée. On constate qu'il y a un glissement des fibres inférieures ce qui signifie qu'il y a des contraintes tangentielles horizontales empêchant ce glissement dans le cas d'une poutre équivalente de hauteur  $2h$ .

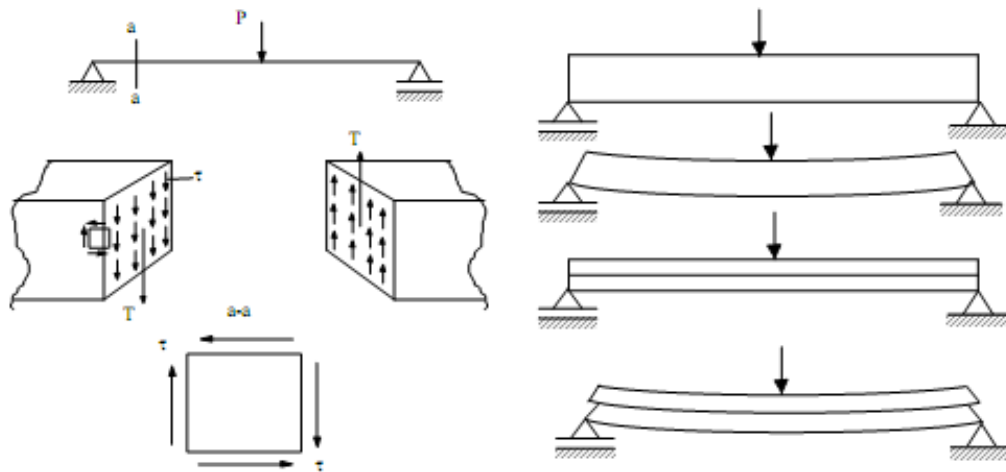


Figure IV. 9 contrainte tangentielle

Considérons un tronçon de poutre de longueur  $dx$  soumis à un effort tranchant constant  $T$  et un moment fléchissant variant de  $M$  à  $M+dM$ .



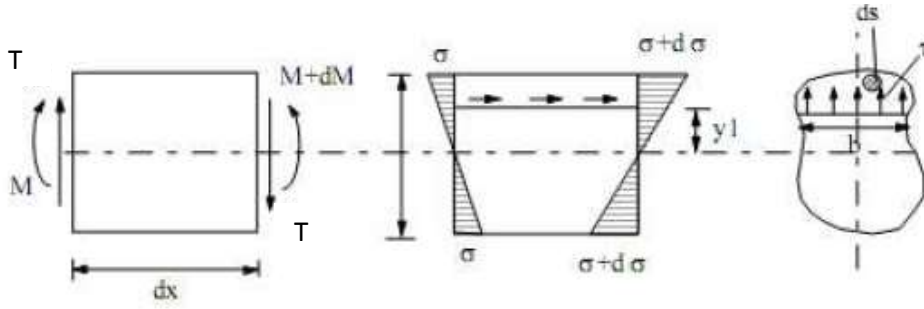


Figure IV. 10 contrainte tangentielle

La partie supérieure de l'élément  $dx$  à une distance  $y$  de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes  $\sigma$  à gauche de l'élément  $dx$ ,  $\sigma + d\sigma$  à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale  $\tau$ . Ecrivons l'équation d'équilibre :

$$\iint_s \sigma ds - \iint_s (\sigma + d\sigma) ds + \int \tau b dx = 0$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section  $b dx$ :

$$\tau b dx = \iint_s \sigma ds = \iint_s \frac{dM}{I} y ds$$

$$\tau b dx = \frac{dM}{I} \iint_s y ds$$

$$\tau b dx = \frac{dM}{I} S_i$$

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_i}{I b}$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par :

$$\tau = \frac{T}{I_z} * \frac{S_z}{b}$$

Avec :

$\tau$  : Contrainte tangentielle.

$b$  : Largeur de la section dans la couche considérée.

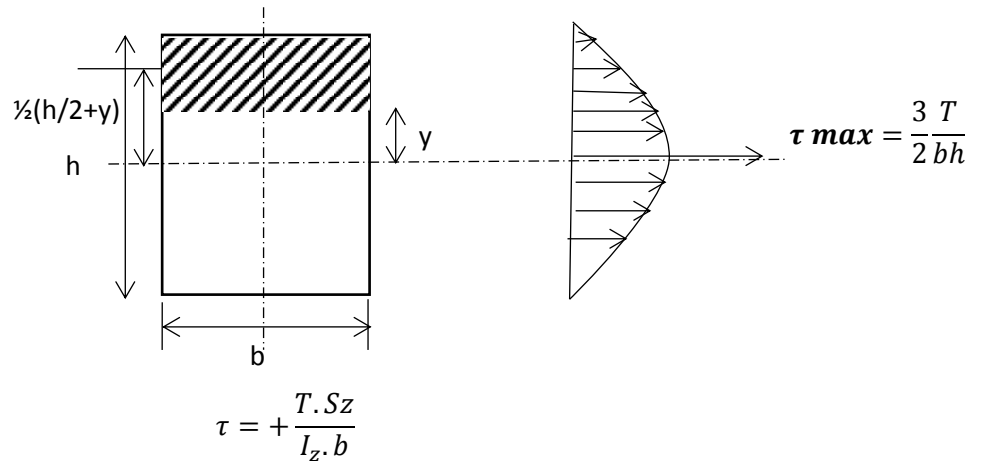
$I_z$  : Moment d'inertie.

$S_z$  : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

$Q$  : L'effort tranchant.

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonnée  $y$  comme le rapport  $S^*_z/b$ .  $\tau$  est nul aux points les plus éloignés du centre de gravité et passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de  $S^*_z/b$ .

Répartition des contraintes tangentielles dans une section droite rectangulaire



$$S_z = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) = b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau = + \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$\tau$  varie suivant une loi parabolique  $\tau$  est maximum pour  $y=0$ , et a pour valeur :

$$\tau_{max} = 1.5 \frac{T}{bh}$$

$\tau$  est nul pour  $y = \frac{h}{2}$

#### IV.11 Condition de la résistance des poutres sollicitées à la flexion simple

##### *Par rapport aux contraintes normales*

Pour assurer la résistance d'une poutre fléchie dans la section la plus dangereuse (section où  $M_f$  est maximum). Il faut que les contraintes de traction et de compression maximales ne dépassent pas les contraintes admissibles correspondantes.

*Section symétrique :*

$$|\sigma_{max}^-| = \left| \frac{M \cdot y_{max}}{I_z} \right| \leq \min(\sigma_-, \sigma_+)$$

*Section non symétrique :*

$$|\sigma_{max}^-| \leq \sigma_-$$

$$|\sigma_{max}^+| \leq \sigma_+$$

**Par rapport aux contraintes tangentielles**

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où  $\sigma$  est maximale  $\tau = 0$  par contre là où  $\tau$  est maximale  $\sigma = 0$ .

$$\tau_{max} = \left| \frac{T \cdot A}{I_n \cdot B} \right| \leq [\tau_{admi}]$$

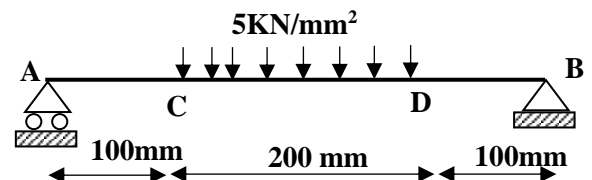
**IV.12. Exercice****Exercice 1**

Déterminer les équations de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Construire les diagrammes. Dans le cas de la poutre sur deux appuis soumise une charge répartie. Ainsi, calculer la contrainte normale maximale et vérifier la résistance de la poutre à la flexion.

Si on change la section de la poutre par une autre cylindrique creuse avec  $d=0.75D$ . Calculer l'épaisseur minimale lui permettant de résister en toute sécurité.

On donne :

- Section cylindrique pleine  $D=15\text{mm}$
- Résistance élastique  $R_e=900\text{N/mm}^2$
- Coefficient de sécurité  $s=3$ .

**Solution exercice 1****1-Calcul des réactions :**

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} R_{B/x} = 0 \\ +R_{A/y} + R_{B/y} - (5 \cdot 200) = 0 \\ -(R_{A/y} \cdot 400) + (5 \cdot 200 \cdot 200) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{B/x} = 0, \\ R_{A/y} = 500\text{N}, \\ R_{B/y} = 500\text{N}. \end{array} \right.$$

## 2. Calcul des efforts internes

### Zone 1 : $0 < X < 100\text{mm}$

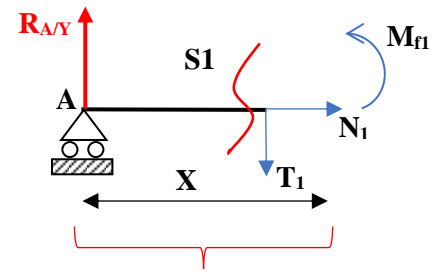
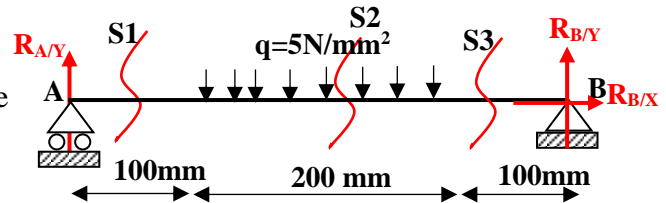
On applique le principe de la statique dans le tronçon gauche de la section S1

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S1} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_1 = 0 \\ R_{A/y} - T_1 = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + M_{f1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ T_1 = +R_{A/y} \\ M_{f1} = R_{A/y} * X \end{cases} \begin{cases} N_1 = 0 \\ T_1 = +500 \text{ N} \\ M_{f1} = 500 X \text{ Nm} \end{cases}$$

$X=0 \quad M_{f1}=0$

$X=100\text{mm} \quad M_{f1}=50\text{Nm}$



ZONE 1

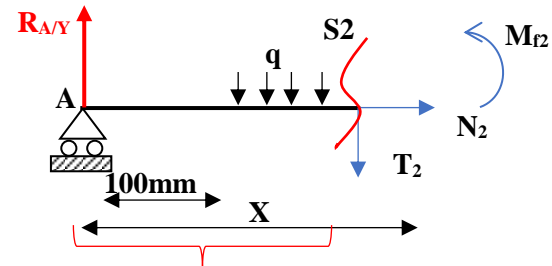
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S2} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_2 = 0 \\ R_{A/y} - q(X-100) - T_2 = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + (q * ((X-100))^2 / 2) + M_{f2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2 = 0 \\ T_2 = -5X + 1000 \\ M_{f2} = 500 * X - (5 * ((X-100)^2 / 2)) \end{cases}$$

$$X=100 \quad T_2 = 500\text{N} \quad M_{f2}=50\text{Nm}$$

$$X=200 \quad T_2 = 0 \text{ N} \quad M_{f2}=75\text{Nm}$$

$$X=300 \quad T_2 = -500 \text{ N} \quad M_{f2}=50\text{Nm}$$



ZONE 2

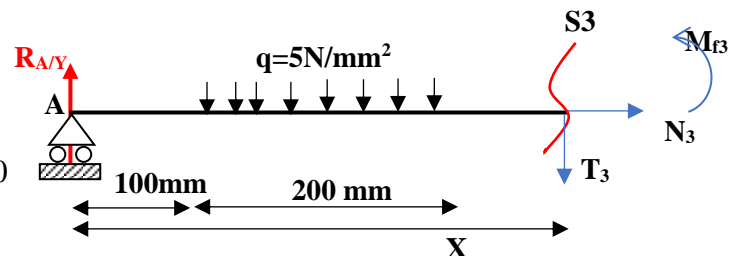
### Zone 2 : $100 < X < 300$

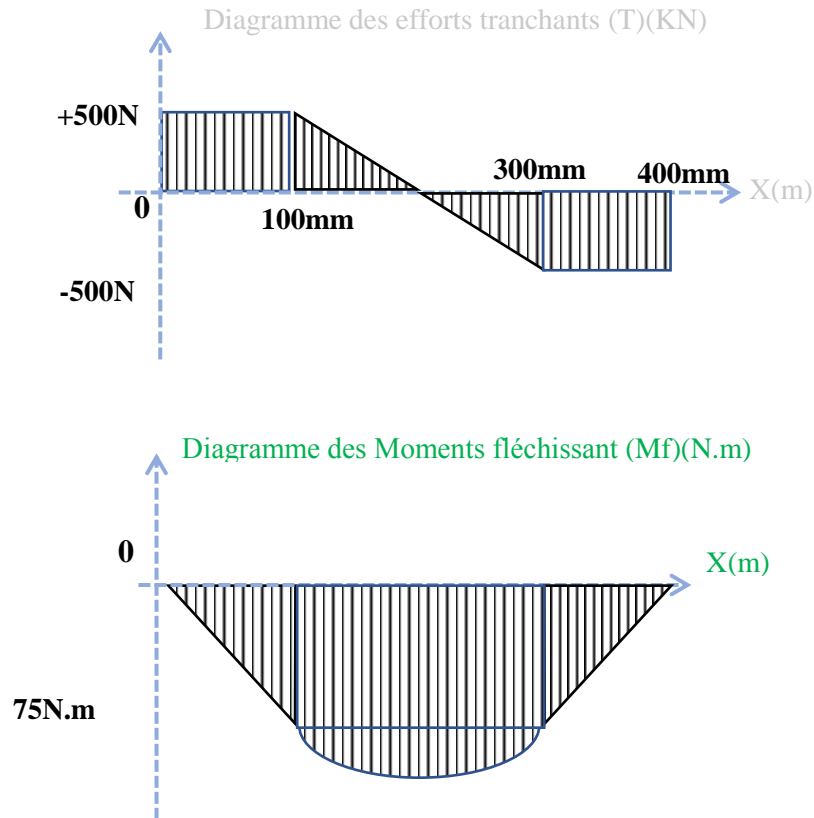
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S3} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_3 = 0 \\ R_{A/y} - q(200) - T_3 = 0 \\ -(R_{A/y} * X) + (q * 200(X-200)) + M_{f3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_3 = 0 \\ T_3 = -500 \\ M_{f3} = -500 * X + 200000 \end{cases}$$

$$X=300 \quad M_{f3}=50\text{Nm}$$

$$X=400 \quad M_{f3}=0\text{Nm}$$

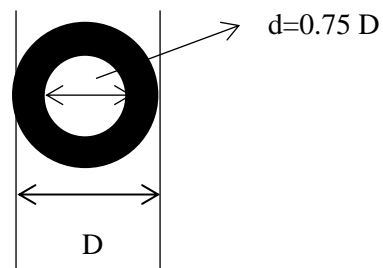




- Calcul de la contrainte normale maximale  $\sigma_{MAX}$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{f_{max}}}{I_z} y = \frac{M_{f_{max}} \left(\frac{d}{2}\right)}{\pi * \frac{d^4}{64}} = \frac{M_{f_{max}} * 32}{\pi * d^3}$$

$$\sigma_{max} = \frac{75000 * 32}{\pi * 15^3} = 226.3 \text{ N/mm}^2$$



- Vérification de la résistance de la poutre à la flexion

$$\sigma_{max} \leq R_p$$

$$R_p = \frac{R_e}{s} = \frac{900}{3} = 300 \text{ N/mm}^2$$

donc

$$\sigma_{max} < R_p$$

La poutre résiste à la flexion

$$\sigma_{max} < R_p$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{f_{max}}}{I_z} y = \frac{M_{f_{max}} \left(\frac{D}{2}\right)}{\pi * \frac{(D^4 - d^4)}{64}} = \frac{M_{f_{max}} * D * 32}{\pi * D^4 - (0.75D)^4} \leq R_p$$

$$\frac{M_{f_{max}} * 32}{\pi * D^3 * 0.68} \leq R_p$$

$$\frac{M_{f_{max}} * 32}{\pi * R_p * 0.68} \leq D^3$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{75 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 300 \cdot 0.68}}$$

$$D \geq 15.5 \text{ mm} \rightarrow d = 0.75 \cdot 16 = 12 \text{ mm}$$

$$e = \frac{D - d}{2} = \frac{16 - 12}{2} = 2 \text{ mm}$$

**Exercice 02**

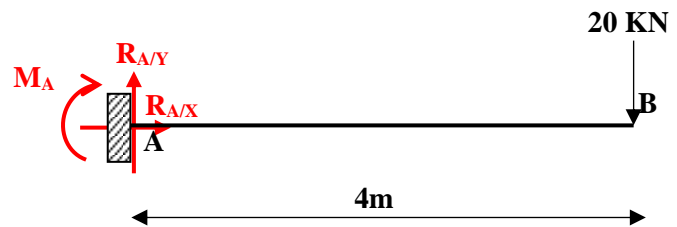
- Tracer les diagrammes des efforts internes (M, , T).

**1-Calcul des réactions :**

Application du principe fondamental de la statique ou de l'équilibre des forces on distingue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} R_{A/x} = 0 \\ +R_{A/y} - 20 = 0 \\ (R_{A/y} \cdot 4) - M_A = 0 \end{array} \right.$$

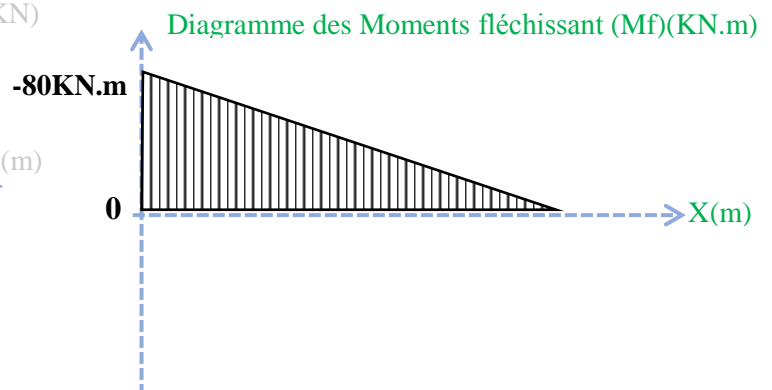
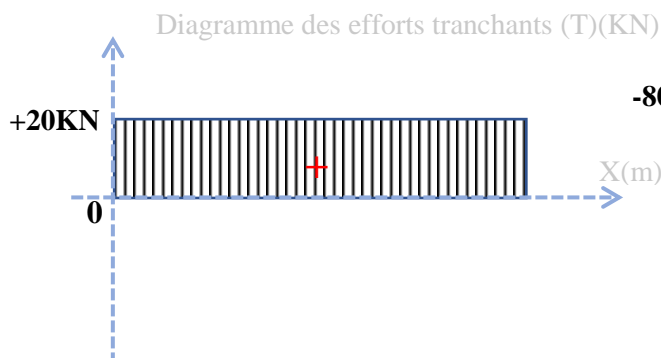
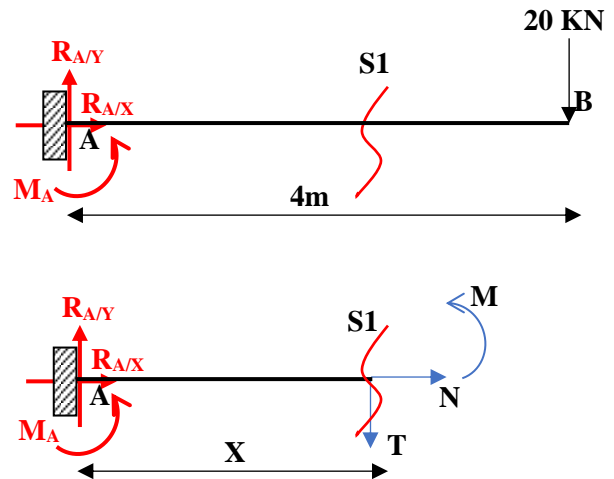
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{B/x} = 0. \\ R_{A/y} = 20 \text{ KN.} \\ M_A = +80 \text{ KN.m} \end{array} \right.$$

**2. Calcul des efforts internes****Zone 1 : 0 < X < 4m**

On applique le principe de la statique dans le tronçon gauche de la section S1

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_{S1} = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ R_{A/y} - T = 0 \\ -(R_{A/y} \cdot X) + M_f + M_A = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T = R_{A/y} \\ M_f = (R_{A/y} \cdot X) - M_A \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ T = 20 \text{ KN} \\ M_f = (20 \cdot X) - 80 \end{array} \right.$$



## Chapitre V

---

# Cisaillement

---

- Définitions,
- Cisaillement simple,
- Cisaillement pur,
- Contrainte de cisaillement,
- Déformation élastique en cisaillement,
- Condition de résistance au cisaillement.

## V.1 Définitions

Une poutre est sollicitée au cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, perpendiculaire à la ligne moyenne, et qui tendent à la cisailer.

### Exemple

#### Cisaillement d'une poutre

Sous l'action des deux résultantes  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$  exercées par les deux couteaux de la cisaille, la poutre (E) tend à se séparer en deux tronçons ( $E_1$ ) et ( $E_2$ ) glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de la section droite (s)

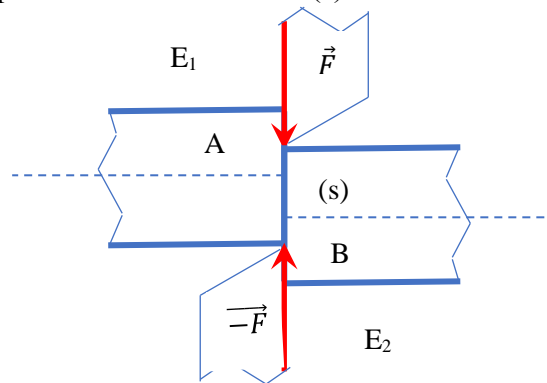


Figure V. 1 exemple 1 cisaillement d'une poutre

#### Cisaillement dans un rivet

La section (s) du rivet est principalement sollicitée au cisaillement.

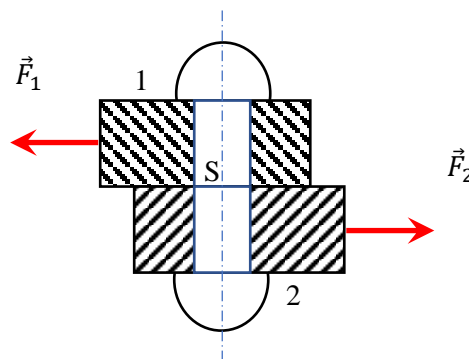


Figure V. 2 exemple 2 : Cisaillement dans un rivet

## V.2 Cisaillement simple et Cisaillement pur :

Généralement, le cisaillement est toujours accompagné avec d'autres sollicitations notamment la flexion, mais il y a plusieurs cas dans l'industrie qui basent uniquement sur le cisaillement, dans ces cas on distingue deux types de cisaillement :

- **Cisaillement pur** : dans ce cas la résultante des forces extérieures se réduit en un seul point d'application dans le plan de la section droite et perpendiculaire à la fibre



moyenne ; ce cas est souvent étudié pour dimensionner les éléments de l'assemblage métallique.

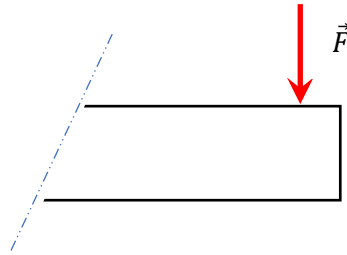


Figure V. 3 cisaillement pur

**Cisaillement simple** : est caractérisé par l'application de deux résultantes de force d'intensité égale, dans le même plan mais de sens opposés (biaxiale).

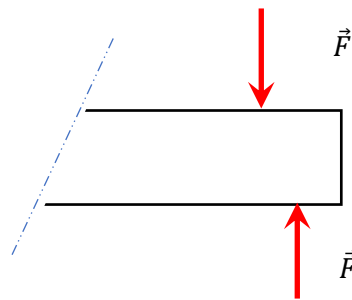


Figure V. 4 Cisaillement simple

### V.3 Contrainte de cisaillement,

#### V.3.1 Essai de cisaillement :

Lors de l'essai de cisaillement pur, les sections infiniment voisines (ab) et (a'b') glissent en bloc l'une par rapport à l'autre. Donc on peut admettre que dans cette section cisailée, la condition de cisaillement pur est approximativement remplie. Si on note par  $\gamma$  l'angle de cisaillement (mam'), avec (m) la position initiale du point appartenant à la section cisailée et (m') sa position finale ou position après déformation (Figure V.5). Si on relève la courbe représentant T/S en fonction de l'angle  $\gamma$ , on obtient un diagramme d'allure semblable à celle de la traction pure (Figure V.6).

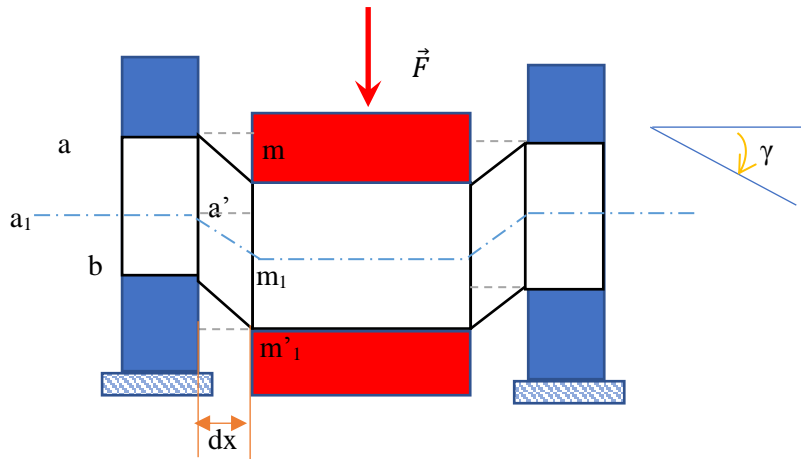


Figure V. 5 Essai de cisaillement

Si on relève la courbe représentant  $T/S$  en fonction de l'angle  $\gamma$ , on obtient un diagramme d'allure semblable à celle de la traction pure.

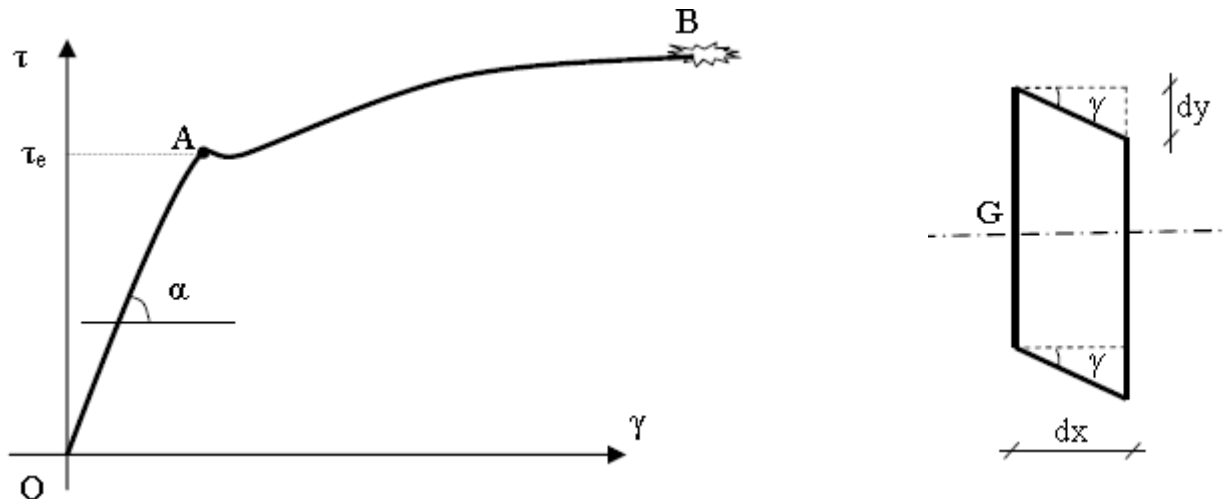


Figure V. 6 Courbe contrainte/déformation dans un essai de cisaillement

**Le segment OA** ; présente la phase linéaire élastique du matériau, dans cette partie de l'allure présente une variation réversible et proportionnelle entre la contrainte et la déformation, jusqu'au le point A qui présente la limite élastique de cisaillement,

- **Le segment AB** ; présente la partie non linéaire plastique de courbe, cette phase est caractérisée par l'apparitions des déformations permanentes et la réduction de l'épaisseur de l'éprouvette d'où le matériau perd ses propriétés élastiques.

- **Le point B**, présente la rupture du matériau et le dépassement de la résistance de l'éprouvette vis-à-vis le cisaillement.

Alors on remarque deux domaines de comportement :

Le domaine élastique linéaire défini par  $0 \leq T/S \leq \tau_e$

Le domaine plastique défini par  $T/S \geq \tau_e$

Dans le domaine élastique, on relie la contrainte de cisaillement  $\tau = T/S$  à l'angle de

cisaillement  $\gamma$  par :  $\tau = \tan \alpha * \gamma$  avec  $\tan \alpha = G = \frac{\tau}{\gamma}$  alors

$$\tau = G * \gamma$$

Avec G module de Coulomb ou deuxième coefficient de Lamé.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E : module d'élasticité

$\nu$  = coefficient de Poisson

Valeurs moyennes de G pour certains matériaux

Aluminium	28000 MPa
Fontes	40000 MPa
Cuivre	48000 MPa
Aciers	80000 MPa
Tungstène	160000 MPa

#### V.4 Déformation élastique en cisaillement :

Dans la partie linéaire de l'allure contrainte-déformation, il y a une proportionnalité entre le glissement transversal par rapport à la section droite et la résultante des forces extérieures, donc la fibre moyenne s'incline d'un angle  $\gamma$  :

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{dx}{dy}$$

Pour le cas de cisaillement pur, la distribution des contraintes est uniforme sur la section droite, alors on obtient,

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Alors

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\tau * T}{S}$$

### V.5. Condition de résistance au cisaillement.

Dans certains cas, il peut être important qu'une pièce sollicitée en cisaillement doive résister en toute sécurité à celui-ci (exemple : assemblage par rivets).

Pour qu'une pièce sollicitée en cisaillement résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte de cisaillement ne dépasse pas une valeur critique  $\tau_{adm}$  appelée contrainte admissible en cisaillement :

$$\tau = \frac{T}{S} < \tau_{adm} = \frac{\tau_e}{f_s}$$

$\tau_{adm}$  : est une caractéristique du matériau, elle ne dépend pas des dimensions de la pièce sollicitée en cisaillement.

$\tau_e$  : La limite élastique au cisaillement

$f_s$  : Coefficient de sécurité

### V.6 Exercice

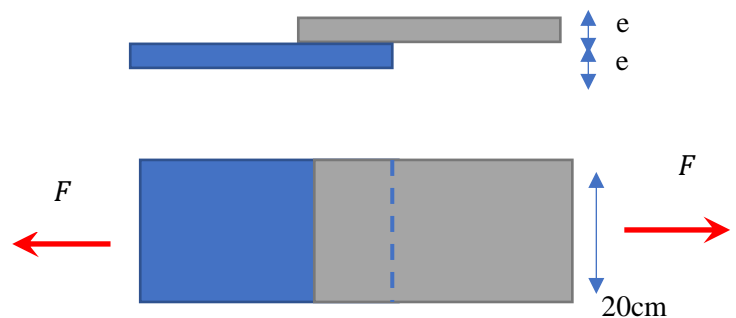
#### Exercice 01 :

On utilise des rivets pour joindre deux plaques identiques en acier de 20 cm de largeur, soumises à un effort biaxial de traction de 15 kN.

- Déterminer l'épaisseur de la plaque sous l'action de traction,
- Calculer l'assemblage nécessaire.
- Vérifier l'assemblage obtenu.

**Données :**  $\sigma_e = 24 \text{ MPa}$        $f_s = 1,5$

#### Solution Exercice 01



- L'épaisseur de la plaque :

$$\frac{F}{S} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{f_s} \quad \text{Alors} \quad \frac{F}{B \cdot e} \leq \frac{\sigma_e}{f_s} \quad \text{donc on trouve} \quad e \geq f_s \frac{F}{B \cdot \sigma_e}$$

$$e \geq 1,5 \frac{15 \cdot 1000}{200 \cdot 24}$$

$$e \geq 4,8675 \text{ mm}$$

$$e = 5 \text{ mm}$$

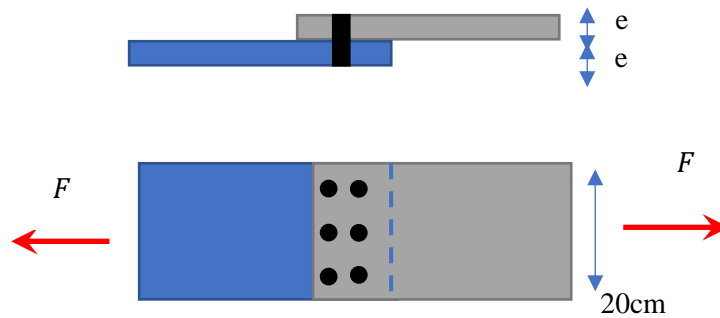
b) L'assemblage :

Pour calculer l'assemblage nécessaire, il faut fixer, soit le diamètre des rivets ou le nombre des rivets, si on impose un diamètre de 20 mm, donc le nombre nécessaire est

$$\frac{T}{n \cdot S} \leq \tau = 0.6 \frac{\sigma_e}{F_s} \quad n \geq \frac{T \cdot F_s}{S \cdot 0.6 \cdot \sigma_e} \quad n \geq \frac{T \cdot F_s}{0.6 \cdot \sigma_e \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$n \geq \frac{15 \cdot 1000 \cdot 1.5}{24 \cdot \pi \cdot (10)^2} \quad n \geq 4.96$$

$n=6$  rivets



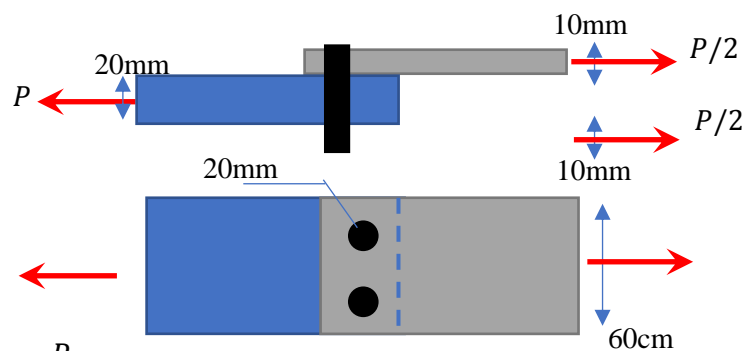
## Exercice 2

Deux bandes d'acier sont assemblées par 2 rivets comme le montre la figure ci-dessous. Vérifier la résistance de l'assemblage.

$$\sigma_{\text{plaque}} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{rivets}} = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$P = 50 \text{ KN}$$



## Solution Exercice 2 :

L'effort tranchant au niveau de chaque section de rivet :

$$T = \frac{P/2}{2} = \frac{P}{4}$$

- Contrainte tangentielle

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{4T}{\pi d^2} = \frac{P}{\pi d^2} \quad \tau = \frac{50 \cdot 1000}{\pi \cdot (20)^2} \quad \tau = 39.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{adm}(\text{riv})} = 0.6 \cdot 80 = 48 \text{ MPa}$$

$$\tau \leq \tau_{adm(riv)} \text{ verifier}$$

## 2/la plaque

La section nette :

$$S_{nett} = 60 * 10 - (2 * 10 * 20) = 200 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{N}{S_{nett}} = \frac{50 * 1000 / 2}{200} = 125 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma > \sigma_{adm(plaque)} \text{ non verifier}$$

La largeur minimal  $b_{min}$  poue que la plaque resiste

$$S_{nett} = b_{min} * 10 - (2 * 10 * 20)$$

$$S_{nett} = 10 * b_{min} - 400$$

$$\frac{N}{S_{nett}} \leq \sigma_{adm(plaque)} \quad S_{nett} \geq \frac{N}{\sigma} \quad b_{min} \geq \frac{1}{10} \left( \frac{N}{\sigma} + 400 \right)$$

$$b_{min} \geq \frac{1}{10} \left( \frac{50 * 1000 / 2}{100} + 400 \right) \quad b_{min} \geq 65 \text{ mm}$$

## Chapitre VI

---

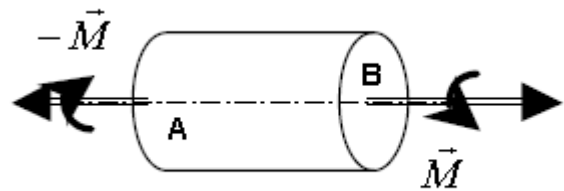
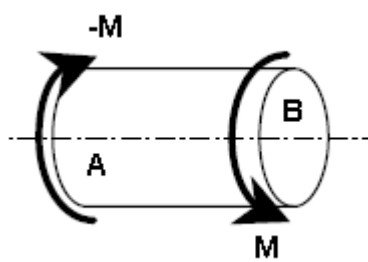
# Torsion

---

- Définitions,
- Contrainte tangentielle ou de glissement,
- Déformation élastique en torsion,
- Condition de résistance à la torsion.

**VI.1 Définitions :**

Une poutre droite est sollicitée en torsion chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux couples  $M$  et  $-M$  égaux et opposés d'axe la ligne moyenne appelé « axe de torsion ». La torsion engendre des contraintes de cisaillement tangentielles à cause de rotation d'axe de la fibre moyenne qui provoque un glissement des sections droites les unes par rapport aux autres.

**VI.2 Hypothèses de base pour étudier la torsion :**

- En plus des hypothèses de base de la RDM, on opte :
- La section droite de la poutre possède un axe de symétrie longitudinal,
- L'application de charges extérieures se résume en résultante dans le plan de section droite et autour de l'axe de la poutre,
- Le matériau reste toujours dans son état élastique.

**VI.3 Déformation élastique en torsion :**

Soit une poutre sollicitée par un moment de torsion, on exprime l'angle de glissement

$$\text{par : } \gamma = \frac{CD}{OD}$$

Avec  $CD=r d\varphi$  et  $OD=dx$  alors on trouve

$$\gamma = \frac{r d\varphi}{dx} = r\theta$$

$\theta$  : présente l'angle de torsion unitaire ;



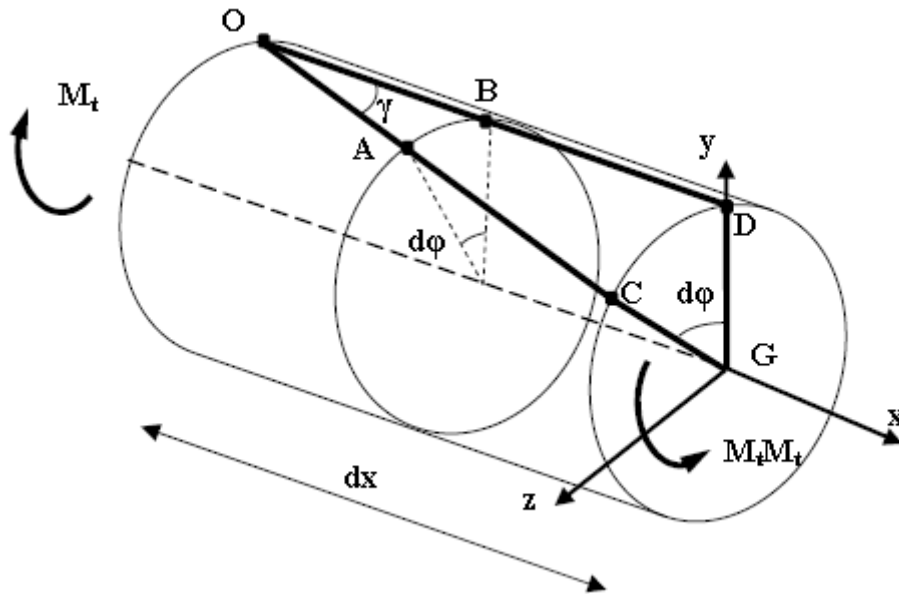


Figure VI. 1 torsion d'une section circulaire

#### VI.4 Contrainte tangentielle

On a  $\tau = G\gamma$

Alors :  $\tau = Gr\theta$

$$\sum M_g = 0$$

$$M_t - \int_s \tau r ds = 0$$

On remplace la contrainte par sa valeur,

$$M_t - \int_s G \theta r^2 ds = 0$$

$$M_t = G\theta \int_s r^2 ds$$

On  $\int_s r^2 ds$  est le Moment d'inertie polaire  $I_p$

$$M_t = G\theta I_p$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_p}$$

Finalement, on peut exprimer les contraintes tangentielles en fonction du moment de torsion :

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r$$

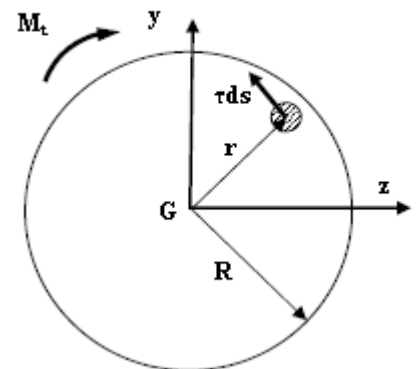


Figure VI. 2 Equilibre de section séculaire sous effet de torsion

Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section. Les sections les plus sollicitées en torsion se trouvent dans la fibre supérieure ou inférieure (+R et -R) :

$$\tau = \pm \frac{M_t}{I_p} R$$

La quantité  $W_p = \frac{I_p}{R}$  est appelée module de torsion

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad \varphi = \int_0^L \theta dx$$

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_t}{G I_p} dx$$

Si le moment et la section sont constante alors :

$$\varphi = \frac{M_t}{G I_p} L$$

### VI.5 Condition de résistance à la torsion.

Le dimensionnement de la structure en torsion consiste à évaluer la résistance de la structure vis-à-vis le moment de torsion appliqué et de déterminer ses géométries afin de réduire les contraintes tangentielle et l'angle de torsion à des valeurs admissibles et permises.

Pour des raisons de sécurité, le dimensionnement se traduit par la vérification de deux conditions suivantes :

La contrainte tangentielle appliquée  $\tau$  doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte admissible, la contrainte admissible à la torsion obtenue en tenant compte d'un coefficient de sécurité  $F_s$  par rapport à la limite d'élasticité du matériau pour des raisons sécuritaires :

$$\tau_{app} < \tau_{adm} = \frac{\sigma_e}{F_s}$$

D'autre cote, le dimensionnement selon l'angle de torsion admissible traduit simplement le fait que l'angle de torsion ne doit pas dépasser l'angle de torsion permis, selon l'utilisation de la poutre :

$$\varphi_{cal} < \varphi_{adm}$$

## VI.6 Exercice

### Exercice : 1

On considère une éprouvette cylindrique en cuivre de diamètre  $d = 25\text{mm}$  et de longueur

$L = 1\text{m}$  soumise à un couple  $M_t = 210\text{ N.m}$ , lors d'un essai de torsion.

L'angle de torsion mesuré est  $\alpha = 4,9$  degrés.

- Calculer le module d'élasticité transversal  $G$  du cuivre testé.
- Déterminer l'angle de torsion d'une même poutre (même matériau et même diamètre) de longueur  $L' = 1,8\text{m}$ , si elle supporte une contrainte de cisaillement maximale  $\tau_{mx} = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

### Solution

- Le module d'élasticité  $G$  :

$$\text{On a : } G = \frac{M_t}{\theta l_p}$$

$$\text{Pour une section cylindrique on a } I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$G = 64030.35 \text{MPa}$$

- Calcul l'angle de torsion  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{\tau_{mx} \cdot L}{G \cdot \frac{D}{2}}$$

Application numérique

$$\alpha = \frac{140 \cdot 1.8 \cdot 1000}{64030.35 \cdot \frac{25}{2}} \quad \alpha = 0.314 \text{ rad} = 17.99^\circ$$

## Références

- **Vitor DS.** Mechanics and Strength of Materials ,Springer ,Berlin Heidelberg New York, ISBN-13 978-3-540-25131-6
- **Timoshenko S.** Résistance des matériaux – Tome 1 : Théorie élémentaire et problèmes. 3ème Ed. Dunod, Paris, 1968,
- **Timoshenko S.** Résistance des matériaux – Tome 2 : Théorie développée et problèmes, Dunod, Paris, 1968. 3ème Ed. Dunod, Paris, 1968,
- **Arnaud D ; Fabrice G ; Frédéric R.** MÉCANIQUE DES STRUCTURES  
Résistance des matériaux, Dunod, Paris, 2008 ISBN 978-2-10-053958-1
- **Doubrière JC.** Résistance des matériaux Cours - Exercices corrigés. 12<sup>ème</sup> édition, Eyrolles, 2013, ISBN978-2-212-13623-4
- RAOUACHE E.** Résistances des matériaux.
- BELABED Z.** Résistance des Matériaux Introduction aux principes et applications,  
Un support de cours destiné spécialement aux étudiants de 2<sup>ième</sup> Année Licence en  
génie mécanique , Centre Universitaire « Salhi Ahmed » de Nâama