

پایگان



مجله ریاضیات

در این شماره :

۳	چهار تکبر شمس آوری	چه باید کرد ؟
۵	ترجمه احمد بیرشک	هفت پل کوئینسبرگ
۹	حسین هاشمی	خدمات ریاضی دانان ایرانی
۱۲	ترجمه : ج . ش	آیا میدانید که ...
۱۴	پرویز شهریاری	هم نشسته های درجه دوم
۱۶	افراسیاب ملکی	ادعای ثابت شده فرما
۱۸	—	حل مسئله الحسن
۲۲	حبیب الله عبداللهی	ترسیمات هندسی فقط با پرگار
۲۲	یحیی یحیوی	رسم II ضلعی منتظم
۲۵	—	حل مسائل شماره ۸
۴۰	ترجمه محمد شریف راده	استقراء ریاضی
۴۳	—	حل مسائل نمونه
۴۷	—	مسائل برای حل
۵۱	دکتر محسن هشترودی	مسائل برای دانش آموزان
۵۲	« « «	مسائل برای دانشجویان
۵۴	—	سرگرمی
۵۵	—	اشتباه در چیست
۵۶	آیا ازشمیدس هر گز میتوانست زمین را بلند کند، ترجمه محمدرضا قسیمی	
۵۷	اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها ایرج ارشاقی	
۵۸	پرسش و پاسخ	
۶۰	از جمله نامه های رسیده	

از انتشارات ایران مک سرو هیل
سازمان انتشارات و خدمات فرهنگی

سال یکم - شماره نهم

آبان ماه ۱۳۴۳
بها : ۳۰ ریال

خواننده عزیز

شورای نویسندگان مجله ، که از این شماره سرگرم کار شده ، تصمیم گرفته است ، چنانچه خوانندگان موافق باشند ؛ از شماره ۱۳ به بعد ، که نخستین شماره سال دوم خواهد بود . از نظر تعداد صفحات و نوع مطالب و قطع مجله و طرح پشت جلد و غیره ، تغییرات مناسبی در مجله بدهد .

خواهشمندیم نظر خود را در این باره برای ما بنویسید تا اگر تغییری در مجله داده می شود ، با نظر اکثریت خوانندگان محترم باشد .

مسئولان اداره مجله ، همه روزه (باستثنای روزهای تعطیل و پنجشنبه ها) بین ساعت های ۶ تا ۸ بعد از ظهر آماده پذیرائی از خوانندگان عزیز و استماع نظرات ایشان میباشند . سپاسگزاریم

شورای نویسندگان

جای اداره : خیابان تخت جمشید ، چهارراه روزولت
شماره ۲۸۲

از تألیفات هوشنگ شریفزاده

پانصد مسأله فیزیکی

برای کلاسهای پنجم دبیرستان و داوطلبان کنکور
دانشکده ها
بها : ۱۰۰ ریال

۴۲۰ مسأله فیزیکی

برای کلاسهای چهارم دبیرستان و داوطلبان کنکور
دانشکده ها
بها : ۶۰ ریال

راهنمای فیزیکی

برای کلاسهای سوم دبیرستان
بها : ۳۰ ریال

ناشر : بنگاه مطبوعاتی معراجی
تهران - خیابان ناصر خسرو

تقاضای اشخاصی که برای مجله

مطلب یا مسأله می فرستند

۱- مطالب فقط در يك روی صفحه کاغذ و با خط خوانا نوشته شود .

۲- مطالب مختلف در اوراق جداگانه نوشته شود .

۳- با هر مسأله حل آن همراه باشد .

۴- برای هر مسأله ذکر شود که طرح فرستنده است یا اینکه از جای دیگر اخذ شده است و مأخذ آن معرفی شود

۵- از ارسال مسائلی که در حل المسائلها و کتبهای درسی چاپ ایران چاپ شده است خودداری گردد

۶- مشخصات فرستنده مطلب یا مسأله به وضوح ذکر شود

۷- اشخاصی که نخواستند باشند نام آنها ذیل مطلب یا مسأله ارسالی ذکر شود ذکر دهند اما در هر حال باید نام و نشانی آنها در نامه ارسالی ذکر شده باشد .

۸- اداره مجله از قبول پاکتهائی که به آنها کسر تمبر تعلق گرفته باشد معذور است .

۹- مطالب و مسائل رسیده به شرط رعایت نکات فوق به ترتیبی که واصل می شود با توجه به موضوع و مناسبت سال تحصیلی در مجله درج می گردد .

یکان مجله ریاضیات

شماره نهم - سال اول

آبانماه ۱۳۴۳

هر ماه یکبار منتشر می شود

از انتشارات : ایران - مکتب گروهبیل

تخت جمشید - چهارراه روزولت - شماره ۲۸۲

تلفن : ۷۵۶۸۶۳

صاحب امتیاز : عبدالحسین مصطفی

زیر نظر شورای نویسندگان

نشانی پستی : صندوق پستی ۳۴۶۳

اشتراک سالانه (۱۲ شماره) ۲۰۰ ریال

تک شماره ۲۰ ریال

مقاله های رسیده مسترد نمی شود

طبع و نشر مندرجات و مقالات اختصاصی این مجله

بی اجازه ممنوع است

چاپخانه محمد علی علمی

چه باید کرد؟

علم همیشه در پیشرفت و توسعه بوده است. اما سرعت این پیشرفت در قرن بیستم، از سرعت آن در قرون گذشته بسی افزونتر است. به قول یکی از دانشمندان، نود درصد اکتشافات علمی بشر، از آغاز تا زمان حال، در پنجاه سال اخیر انجام گرفته است. ریاضیات نیز از این پیشرفتها بی نصیب نبوده است و به نظر می رسد که دانشجویان و دانش آموزان جوان برای آگاهی از این کشفیات از هر جهت اولویت دارند. چنانکه در کشور های متمدنی، آنها که فرهنگشان بر نظامی استوار است، کلیه تغییرات و تحولات علمی بلافاصله در برنامه ها وارد می شود. می گویند که در این عصر تغییر و تحول، معلم نباید به کلاس برود که مطالبی را که ده سال پیش فرا گرفته است تدریس کند، بلکه باید به کلاس برود تا مطالب تازه ای را که شب پیش آموخته است به محصلان منتقل سازد.

يك بررسی ساده و کوتاه در برنامه های تحصیلی کشور ما آشکار می سازد که اثری از این پیشرفتها در آنها نیست. آیا شایسته است که نسل جوان کشور ما از چنین پیشرفتهایی نا آگاه بماند؟ آیا درست است که طبق برنامه مصوب، در دبیرستانهای ما همان موادی از علوم و ریاضیات تدریس شود که يك قرن پیش جزء برنامه های دبیرستانی بوده است؟ آیا نباید در مطالب تعلیماتی برنامه های علوم و ریاضیات تجدید نظر کرد و مقدمات فهم اکتشافات تازه تری را فراهم آورد؟ مسلماً پاسخ همه این سؤالات مثبت است. اغلب کشورها با بررسیهای کامل و سریع چنین کاری را کرده و در فکر هماهنگ ساختن مواد علمی برنامه های آموزشی دانشگاهی و دبیرستانی خود با این پیشرفتها برآمده اند و گامهای بلندی نیز در این راه برداشته اند. ما نیز چه بخواهیم و چه نخواهیم باید هر چه زود تر چاره جوئی کنیم و در این راه گامهایی برداریم. اگر چند سال دیگر در این کار تأخیر کنیم، دیگر دانش آموزان یا دانشجویان ما که برای ادامه تحصیل به خارج می روند زبان ریاضیاتی را که در آنجا تعلیم داده می شود نخواهند فهمید.

با شرایط خاصی که دستگاه تعلیم و تربیت کشور به سبب پیروی از نظام هرگزیت دارد، تجدید نظر در برنامه ریاضیات دبیرستانی باید در وزارت فرهنگ انجام گیرد. اما دیگر برای صاحب نظران قابل قبول نخواهد بود که تنی چند به عنوان تجدید نظر در برنامه گرد هم بنشینند و همان مطالب موجود در برنامه فعلی را از نظر کلاس بندی پس و پیش کنند. به نظر ما تجدید نظر در برنامه ریاضیات دبیرستانی باید دارای دوجنبه باشد. یکی آنکه مطالب کهنه و

نالازم جای خود را به مطالب نو و لازم بدهد و دیگر آنکه نحوه برداشت مطالب با توجه به زبان جدید ریاضیات تغییر یابد و قالب نوینی به خود گیرد .

معلوم نیست که چرا دانش آموز رشته ریاضی در سال ششم باید هندسه رقومی تحصیل کند، که زمان درازی است حتی از برنامه دبیرستانی کشوری که ما بر نامه های خود را از آن اقتباس کرده ایم حذف شده است ، ولی از فرا گرفتن احتمالات و مسائل عملی مربوط به آن یا تبدیل وتر کیب و ترتیب با آن همه موارد استعمال در مسائل عادی روزانه بی بهره بماند ؟ معلوم نیست که چرا در هندسه ای که تدریس می کنیم معتقد به پیروی از روش استدلال قیاسی هستیم ولی جبر را به طور ماشینی می آموزیم و دانش آموزان را به آکروبات بازی با حروف و امی داریم . چرا در سال اول روش نصف کردن يك پاره خط را در هندسه با استدلال بیان می کنیم ولی روش جذر گرفتن از اعداد را در حساب بدون استدلال عرضه می داریم . آیا درست است که دانش آموزی رشته ریاضی دبیرستان را به پایان رسانده باشد ولی با اصول توزیعی و شرکت پذیری و استقلال از ترتیب اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم آشنا نباشد ؟ آیا درست است که اصل استقلال از ترتیب را در حساب استدلالی سال ششم به عنوان قضیه به خورد دانش آموزان بدهیم و به اصطلاح در صدد اثبات آن نیز بر آییم !! اساساً حساب استدلالی در سال ششم برای چیست ؟ مگر نمی توان از همان ابتدا ، یعنی حتی از دبستان ، حساب را با استدلال تدریس کرد، نهایت استدلالی در خور فهم طفل . پس چه موقع دانش آموز باید طرز کار با ماشینهای محاسبه و به ویژه خط کش محاسبه را فرا گیرد ؟ آیا هنگامی که از تضادهای حسابی و هندسی بحث می کنیم ، نمی توانیم ، رشته ها و سریها را نیز به طور کلی مورد بحث قرار دهیم ؟

اینها و صدها نکته مهمتر دیگر درباره ریاضیات دبیرستانی و تعلیم آن، این مطلب را تأیید می کند که برنامه فعلی ریاضیات باید به یکباره واژگون شود . این برنامه به قول معروف نه به درد دنیای خورده و نه به درد آخرت . شایسته است که هیئتی متشکل از استادان و دبیران ، آنها که با جهت تغییرات نوین برنامه های ریاضیات در دبیرستانهای دنیا آشنا باشند ، از جانب وزارت فرهنگ به طور موظف به این کار گمارده شوند و روزی لا اقل چند ساعت از وقت خود را به مطالعه برنامه های کشورهای پیشاهنگ و تطبیق آن با شرایط خاص ایران صرف کنند و به تدوین برنامه ای جامع در کادر هدفهای تعلیماتی کشور بپردازند . این تنها راهی است که می توان برنامه کهنه و پوسیده کنونی را متناسب با انقلابی کرد که از سال ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ در صحنه تعلیمات ریاضیات دبیرستانی به وقوع پیوسته است .

جهانگیر شمس آوری

هفت پل کونیگسبرگ

~~~~~

از : لیونهارد اولر

ترجمه از : احمد بیرشک

در کتاب «توپولوژی» که بقازگی به همت سازمان انتشارات و خدمات فرهنگی «ایران مک گرو هیل» ، بعنوان طلیمه یک سلسله کتاب زیر عنوان «کاوش در ریاضیات نوین» ، انتشار یافته ، بحثی درباره پل های کونیگسبرگ شده است . چون مسأله « هفت پل کونیگسبرگ » از مسائل مهم است ، ترجمه مقاله ای که «لیونهارد اولر» درباره آن نوشته است از نظر خوانندگان ارجمند می گذرد .

اولر ، که از اجله دانشمندان ریاضی است ، بسال ۱۰۸۵ ه . ش . ( = ۱۷۰۷ م . ) در شهر بال کشور سوئیس چشم بدنیا گشود . کار اصلی او در ریاضیات است و در رشته آنالیز و مکانیک استدلالی اکتشافات جالب کرده است . در هیأت فرضیه جدیدی درباره ماه آورد و درباره اختلال حرکات سیارات مطالعاتی کرد . در رشته های فیزیک و شیمی و فلسفه نیز کار کرد . با اینکه در ۶۰ سالگی کور شد تا ۷۶ سالگی ، یعنی زمان مرگ دست از پژوهش برنداشت . آرا گو ، ستاره شناس مشهور فرانسوی درباره وی گفته است :

«اولر بدون زحمت حساب می کرد ، بهمان آسانی که آدمی نفس می کشد و عقاب در میان باد در آسمان پرواز می کند . » از او سیزده فرزند و شصت تا هشتاد مجلد بزرگ نوشته بجاماند . هنگامی که بسال ۱۱۱۳ ه . ش . ( = ۱۷۳۵ م . ) در سن پترزبورگ (لنین گراد کنونی) در خدمت کاترین ، ملکه روسیه ، بسر می برد مسأله هفت پل کونیگسبرگ بوی عرضه شد و وی از این مسأله تفریحی یک قاعده مهم ریاضی بیرون کشید و مقاله ای را که اینک ترجمه آن از نظر شما می گذرد به فرهنگستان علوم روسیه تقدیم کرد .

دانش آموزان دبیرستانی در هندسه فضایی با رابطه معروف اولر که بین تعداد رؤوس و وجوه و پل های چند وجهی ها وجود دارد آشنا شده اند . این رابطه عبارت است از :  $۲ - \text{تعداد پل ها} = \text{تعداد وجوه} + \text{تعداد رؤوس}$  . دکارت ، ریاضی دان مشهور فرانسوی هم ۹۲ سال پیش از اولر باین رابطه برخورد کرده بود .



آن را جزو هندسه موضعی بدانم ، خاصه که حل مسأله فقط منوط بمطالعه در موضع بود و به محاسبه احتیاجی نداشت . در این نوشته من روشی را که برای حل این گونه مسائل کشف کرده ام بیان می کنم ، باشد که بعنوان مثالی از هندسه موضعی مورد استفاده واقع گردد .

۲- این مسأله ، که گمان می کنم کاملاً معروف باشد ، باین صورت بیان می شود : در شهر کونیگسبرگ ، پروس جزیره ایست بنام «کنایب هف» که دو شاخه رود «پره گل» در اطراف آن جریان دارند ، این جزیره را A می نامیم . هفت پل a و b و c و d و e و f و g بر روی دوشاخه رود ساخته شده اند . مسأله این است که آیا مسیری می توان یافت که از روی هر هفت پل بگذرد و از روی هر یک از آنها بیش از یک بار عبور نکند ؟ شنیدم که عده ای منکر امکان وجود چنین مسیری بودند و عده ای هم در وجود آن تردید کردند اما هیچکس عقیده نداشت که این کار عملاً مقدور باشد .

۱- شاخه ای از هندسه که با اندازه ها سروکار دارد در زمان گذشته با نهایت علاقه مطالعه شده ، اما شاخه دیگری تا کنون ناشناخته مانده است . لایب نیتز برای نخستین بار از آن سخن گفته و آن را «هندسه موضعی» (۱) نامیده است . این نوع هندسه با روابطی سروکار دارد که فقط به «موضع» شکل بستگی دارند و در آن مطلقاً اندازه ها مورد توجه نیست و محاسبه کمیات مداخله ندارد .

اما تا کنون از مسائلی که مربوط به این شاخه هندسه هستند یا روشی که برای حل آنها لازم است تعریف رضایت بخشی نشده است . اخیراً مسأله ای طرح شده که مسلماً مربوط به هندسه است اما چون بهیچ روی اندازه ها را در آن دخالتی نیست و محاسبات کمی در آن مورد پیدا نمی کند . من تردید بخود راه ندادم که

۱ - Géométrie de position  
Geometria situs

یا



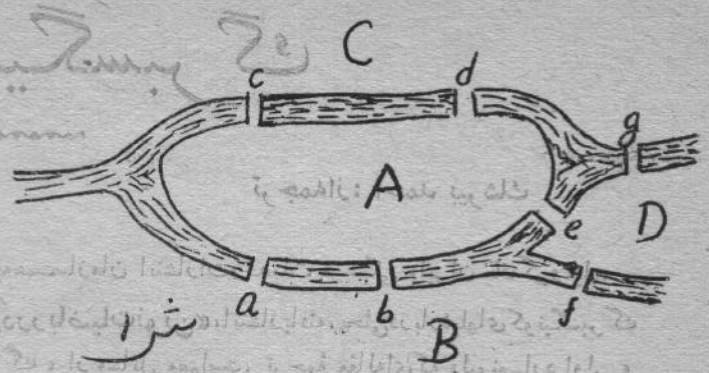
در پی انجام شود مسیر را به ABD نشان می‌دهم. در این نمایش حرف وسط B در عین حال نمایندۀ ناحیه‌ایست که حرکت اول به آن منتهی می‌شود و ناحیه‌ای که حرکت دوم از آن آغاز می‌گردد. پس تکرار B لازم نیست.

۵- همچنین اگر رهرو ما با عبور از پل g از D به C برود سه عبور پیاپی را با علامت ABCD نمایش می‌دهم. این چهار حرف نشان می‌دهند که مسافر از A حرکت کرده و نخست به B، سپس به D و سرانجام به C رسیده است. و چون این چهار ناحیه با آب از هم جدا شده‌اند، مسافر بناچار از سه پل گذشته است. عبور از چهار پل با پنج حرف مشخص می‌شود و بطور کلی اگر مسافر از چند پل بگذرد مسیر او با حروفی مشخص می‌گردد که تعدادشان از عدد پلها یکی بیشتر است؛ مثلاً برای عبور از هفت پل هشت حرف لازم است.

۶- در این روش مرابا پل‌هایی که از آن عبور شده است کاری نیست، یعنی اگر بین دو ناحیه A و B چند پل وجود داشته باشد، AB مبین رفتن از A به B است و بستگی به پلی که از آن عبور شده ندارد. باین ترتیب اگر مسیری یافته شود که در آن از هر هفت پل کوئینگزبرگ و از هر يك فقط يك بار گذر شود مسیر با هشت حرف نمایش داده می‌شود و ممکن است که در این مسیر ترکیب حروف A و B (یعنی AB یا BA) دوبار وارد شود زیرا که دو پل a و b دو ناحیه را بهم مربوط می‌کنند. همچنین ممکن است که ترکیب AC تکرار گردد، اما AD و BD و CD هر يك فقط يك بار بکار می‌رود.

۷- مسأله‌ای که باقی می‌ماند این است که آیا از چهار حرف A و B و C و D می‌توان يك رشته هشت حرفی تشکیل داد که در آن تمام ترکیبهای یاد شده به تعداد لازم وارد شوند. پیش از اینکه برای تحقیق در بارۀ امکان تحقق چنین امری بکوشیم، بهتر است ببینیم نظراً حصول چنین امری امکان دارد یا نه. زیرا که اگر ثابت شود وجود این امر امکان پذیر نیست هر کوشش در راه رسیدن به آن عبث و بیهوده است. باین سبب من در پی کشف قاعده‌ای برآمدم که بر طبق آن بتوان در این مسأله و مسائل مشابه بی‌زحمت و در دسر در امکان ترکیب حروف به نحو مطلوب تحقیق کرد.

۸- به منظور یافتن چنین قاعده‌ای من يك منطقه تنهای A فرض می‌کنم که پل‌های متعدد به آن منتهی می‌شوند (شکل ۲). از این پلها نخست فقط a را در نظر می‌گیرم. اگر کسی از این پل بگذرد یا پیش از گذشتن از آن در A بوده است و یا پس از عبور از آن به A وارد می‌شود. در هر حال با ترتیبی



من بر اساس آنچه گفتیم این مسأله کلی را برای خود طرح کردم: به صورتی که رود و شاخه‌های آن باشند و بر روی آنها هر چند پل ساخته شده باشد، آیا ممکن است کسی طی راه پیمایی از روی همه این پلها بگذرد و از روی هر يك فقط يك بار عبور کند؟

۳- مسأله هفت پل کوئینگزبرگ را می‌توان با تنظیم جدولی حل کرد که در آن همه راههایی که امکان پذیر باشد جمع شده باشند و با تحقیق و آزمایش راهی را که جواب مسأله باشد (اگر چنین راهی وجود داشته باشد) پیدا کرد. اما این روش بسبب تعداد زیادی راههایی که بنظر می‌رسند بسیار خسته کننده و دشوار است و اگر عدد خیلی بیشتری پل وجود داشته باشد این روش را به هیچ روی نمی‌توان بکار برد.

هر گاه طریقه‌ای را که شرح دادم تجزیه کنیم، به تعداد زیادی مطالب جزئی بر می‌خوریم که با مسأله ارتباطی ندارند و بیشك به همین دلیل است که این روش تا این حد سنگین و غیر عملی است. پس من این روش را معتبر نشمردم و در پی یافتن روشی با هدف محدودتر برآمدم، یعنی روشی که تعیین کند آیا مسیری که با شرایط مسأله وفق دهد ممکن الحصول است. گمان می‌کنم که از این راه که سهل تر است بتوان آسانتر به مقصود رسید.

۴- پایه روش من بر طرز بیان خاص و مناسبی است که در این نوع مسأله بکار می‌برم. برای نشان دادن زمینها یا ناحیه‌هایی که به وسیله رود از هم جدا شده‌اند حروف بزرگ A و B و C و D و... را بکار می‌برم. وقتی کسی با گذشتن از پل a یا b از ناحیه A به B برود این نقل مکان را با علامت AB نشان می‌دهم که در آن حرف اول (دست چپ) نمایندۀ ناحیه‌ایست که حرکت از آن آغاز گردیده و حرف دوم (دست راست) ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که پس از گذشتن از پل به آن وارد شده است. اگر رهرو ما با عبور از پل از B به D برود مسیرش را با BD نمایش می‌دهم. اما اگر رهرو دو حرکت پی-



که برای نمایش عبور از پل دادیم حرف A يك-

بار در نوشتن وارد میشود. اگر سه پل a و b و c را در نظر بگیریم و کسی يك بار از هر سه عبور کند، حرف A دومر تبه در نوشتن مسیر بکار می رود، خواه آن کس از A حرکت کرده باشد یا از ناحیه دیگر. اگر

مسافر از پل بگذرد، حرف A در مسیر اوسه بار وارد می شود. بطور کلی اگر عدد پلهایی که مسافر از آنها میگذرد فرد باشد، ۱ به آن بیفزاید و حاصل جمع را نصف کنید، عددی که بدست می آید تعداد دفعاتی است که حرف A در مسیر تکرار می شود.

۹- حالا برمی گردیم به مسأله کونیگسبرگ (شکل ۱). چون آنجا بوسیله پنج پل میتوان به جزیره A وارد یا از آن خارج شد، در عبارتی که مسیر مطلوب را تعیین میکند حرف A باید سه بار نوشته شود. حرف B باید دوبار تکرار گردد، زیرا که سه پل به ناحیه B منتهی میشود. و نیز حرفهای D و C باید هر يك دوبار تکرار شود. بنابراین حرفی که باید در نوشتن مسیر بکار روند (و چنانکه دیدیم عددشان ۸ است) باید از سه A، دو B، دو D و دو C تشکیل شوند. اما ممکن نیست در يك رشته هشت حرفی نه حرف داشت. پس واضح میشود که عبور از هفت پل کونیگسبرگ به نحوی که خواسته شده است مقدور نیست.

۱۰- بابکار بردن این روش در صورتی که تعداد پلهایی که به ناحیه خاصی منتهی می شوند فرد باشد، همیشه می توانیم بدانیم که آیا می توان با يك راه پیمایی از روی همه آنها گذشت و از روی هر يك فقط يك بار عبور کرد. تحقق این امر وقتی میسر است که عدد پلهای بعلاوه ۱ مساوی باشد با مجموع اعدادی که تعیین می کنند هر حرف به تنهایی چند بار ممکن است تکرار شود. اما اگر عدد مذکور از عدد پلهای بعلاوه ۱ بزرگتر باشد مسأله جواب ندارد، مانند مسأله کونیگسبرگ. قاعده ای که در قسمت ۸ گفتیم و تعیین می کند که بر حسب تعداد پلهایی که به ناحیه A منتهی می شوند حرف A در تعیین مسیر چند بار تکرار می شود اعم است از وقتی که پلهای A را يك منطقه دیگر یا چند منطقه دیگر مربوط سازند، زیرا که برای وضع قاعده فقط ناحیه A را در نظر گرفتیم.

۱۱- وقتی که عدد پلهای زوج باشد، باید ببینیم که حرکت را از ناحیه A شروع می کنیم یا از ناحیه دیگر. مثلا اگر دو پل داشته باشیم و حرکت از A شروع شود، حرف A دوبار در مسیر وارد می شود؛ یکی برای بیان حرکت از A و عبور از يك پل و دومی برای عبور از پل دیگر و ورود به A. اما اگر حرکت از ناحیه دیگر شروع شود، حرف A در مسیر فقط يك بار نوشته می شود که در این حال مبین ورود به A از يك پل و خروج از آن از پل دیگر است.



۱۲- حالا حالتی را در نظر می گیریم که تعداد پلهای باشد. اگر حرکت از ناحیه A شروع شود، حرف A در مسیر سه بار تکرار می شود و اگر از ناحیه دیگر آغاز شود، فقط دو بار. اگر عدد پلهای ۶ باشد، در صورت حرکت از ناحیه A حرف A چهار بار تکرار می شود و در صورت حرکت از ناحیه دیگر فقط سه بار. بطور کلی اگر عدد پلهای زوج باشد و حرکت از ناحیه A شروع نشود، عدد دفعاتی که حرف A در مسیر وارد می شود نصف عدد پلهای است، و اگر از ناحیه A شروع شود نصف بعلاوه ۱ عدد آنها.

۱۳- هر مسیری بناچار از ناحیه ای شروع می شود. عدد دفعاتی را که حرف نماینده هر ناحیه در مسیر وارد می شود از روی تعداد پلهایی که به آن ناحیه منتهی می شوند باین ترتیب معین می کنیم: اگر عدد پلهای فرد باشد، ۱ به آن افزوده حاصل را تقسیم به دومی کنیم؛ و اگر عدد پلهای زوج باشد، همان را بر ۲ قسمت می نمائیم. هر گاه مجموع عددهایی که به این نحو بدست می آیند با عدد پلهای بعلاوه ۱ مساوی باشد، راه پیمایی به نحو مطلوب میسر است مشروط به آنکه حرکت از ناحیه ای آغاز شود که عدد پلهای منتهی به آن فرد باشد؛ اما اگر مجموع مذکور از عدد پلهای بعلاوه ۱ باندازه يك واحد کمتر باشد (یعنی مساوی عدد پلهای باشد)، برای امکان حل مسأله باید حرکت را از ناحیه ای شروع کرد که تعداد پلهای منتهی به آن زوج باشد، زیرا که در این صورت هم به مجموع ۱ علاوه می شود.

۱۴- برای تعیین آنکه وقتی که تعداد رودها و پلهای هر چه باشد در چه صورت مسیر از روی هر پل فقط يك بار می گذرد طرز عمل من به این نحو است: (۱) ناحیه هایی را که از يك دیگر بوسیله آب جدا می شوند به حروف A و B و C و ... متمایز می سازیم. (۲) به عدد پلهای ۱ می افزایم و حاصل جمع را یادداشت می کنیم. (۳) زیرا این عدد حروف A و B و C و ... را در ستونی زیر هم نوشته و روبروی هر يك عدد پلهایی را که به آن منتهی میشوند ثبت می کنیم. (۴) پهلوی هر حرفی که عدد روبروی آن زوج باشد علامت ستاره میگذاریم. (۵) روبروی هر عدد زوج نصف آن و روبروی هر عدد فرد نصف بعلاوه ۱ آن را می نویسم. (۶) عددهای ستون آخر را جمع می کنیم، اگر مجموع مساوی عددی که بالای



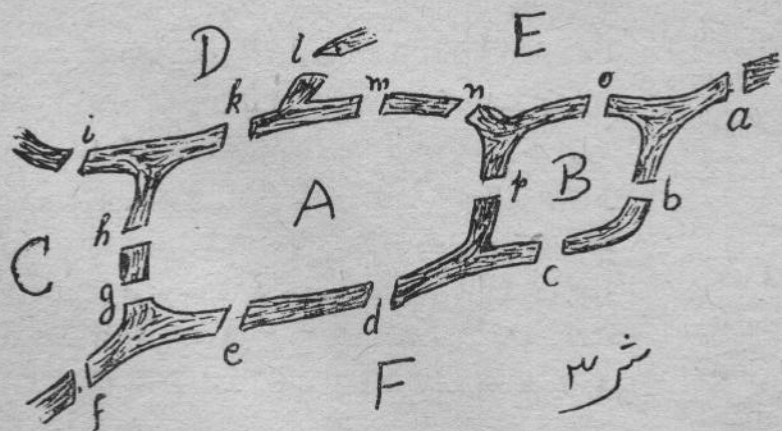
$E_a F_b B_i F_d A_e F_f C_g A_b C_i D_k A_m E_n A_p B_o E_l D$

۱۶- با این روش حتی در پیچیده ترین حالتها می توانیم بدانیم که یافتن مسیری برای حل مسأله ممکن هست یا نیست . اما میل دارم روش خیلی ساده تری را بیان کنم که با توجه به چند نکته خیلی به آسانی از روش قبلی نتیجه می شود .

از جمله اینکه مجموع عددهای نماینده پلهای منتهی به نواحی مختلف ، که در ستون دوم و روبروی حروف A و B ... ثبت شده اند ، دو برابر تعداد پلهای است ، زیرا که در ستون مذکور هر پل برای دو منطقه ، یعنی دوبار ، به حساب آمده است .

۱۷- با در نظر گرفتن این نکته متوجه می شویم که مجموع عددهای ستون دوم همیشه زوج است ، زیرا که نصف آن مساوی عدد پلهای است . پس ممکن نیست که فقط یکی از عددهای روبروی A و B و C ... فرد ، یعنی مثلاً ۱ یا ۳ یا ۵ یا ... باشد . اگر یکی از این عددها فرد باشد حتماً يك عدد زوج از آنها ، یعنی دو یا چهار یا ... عددشان باید فرد باشد تا مجموعشان زوج شود . در مثال کونیگسبرگ هر چهار عدد و در مثال دوم دو عدد روبروی D و E فرد هستند .

۱۸- چون مجموع عددهای روبروی A و B ... مساوی دو برابر عدد پلهای است واضح است که اگر ۲ به آن بیفزائیم و حاصل را تقسیم بر دو کنیم خارج قسمت مساوی عددی می شود که در بالای جدول نوشته شده است . وقتی همه عددهای ستون دوم زوج باشند و نصف هر يك را در ستون سوم نوشته باشیم مجموع



عددهای ستون سوم يك واحد کمتر از عدد بالای جدول است . در این حال بهر صورت و از هر ناحیه که حرکت را آغاز کنیم راه پیمایی میسر است به دلیل آنکه عدد پلهای برای هر ناحیه زوج است و این همان چیزی است که مسأله می خواهد . در کونیگسبرگ می توانستیم مسأله را حل کنیم بشرط آنکه از روی هر پل دوبار بگذریم ، یعنی در حقیقت هر پل را به دو پل تقسیم کنیم تا عددشان زوج شود . بقیه در صفحه ۶۲

جدول نوشته ام ، یا ۱ واحد کمتر از آن ، باشد مسأله ممکن است . اما باید توجه داشت که اگر مجموع ۱ واحد از آن عدد کمتر باشد ، باید حرکت از ناحیه ای شروع شود که پهلوی نامش ستاره گذاشته شده و اگر مجموع با عدد بالای جدول مساوی باشد باید شروع حرکت از ناحیه ای که جلواسمش ستاره نیست باشد .

برای مسأله کونیگسبرگ این جدول را تنظیم می کنم :

|               |   |   |         |   |   |
|---------------|---|---|---------|---|---|
| عدد پلهای : ۷ |   |   | $7+1=8$ |   |   |
| A             | ۵ | ۳ | B       | ۳ | ۲ |
| C             | ۳ | ۲ | D       | ۳ | ۲ |
|               |   |   | ۹       |   |   |

مجموع ستون آخر از ۸ بزرگتر است ، پس مسأله جواب ندارد و راه پیمایی به نحو مطلوب میسر نیست .

۱۵- در مثال دیگر دو جزیره را در نظر میگیرم که چهار رود ، مطابق شکل ۳ ، آنها را در میان گرفته اند و پانزده پل a و b و c ... نواحی مختلف را بیکدیگر مربوط می سازند . باز هم مسأله این است که آیا میتوان مسیری تعیین کرد که از روی هر ۱۵ پل بگذرد اما از روی هیچ يك بیش از يك بار عبور نکنند . (۱) کار را با گذاشتن نامهای A, B, C, D, E, F بر روی نواحی آغاز میکنم . به عدد پلهایک می افزایم و عدد ۱۶ را در بالای نویسم . (۳) حروف A تا F را در ستونی زیر ۱۶ یادداشت میکنم و

روبروی هر يك عدد پلهایی را که به آن منتهی میشوند مینویسم ، مثلاً ۸ جلو A ، ۴ جلو B و ... (۴) حرفهایی را که عدد روی آنها زوج است با علامت ستاره ممتاز میکنم . (۵) در ستون سوم نصف هر عدد زوج یا نصف بعلاوه ۱ هر عدد فرد را مینویسم . (۶) عددهای ستون سوم را جمع میکنم ، مجموع ۱۶ است و با عددی که در بالای جدول نوشته شده است یکی است ، پس مسأله ممکن است مشروط به آنکه حرکت از یکی از نواحی بی ستاره (D یا E) آغاز شود . مسیر را وقتی که از ناحیه E شروع شود با

|     |   |   |
|-----|---|---|
| ۱۶  |   |   |
| * A | ۸ | ۴ |
| * B | ۴ | ۲ |
| * C | ۴ | ۲ |
| D   | ۳ | ۲ |
| E   | ۵ | ۳ |
| * F | ۶ | ۳ |
| ۱۶  |   |   |

نام پلی که باید بین هر دو ناحیه از روی آن گذشت مینویسم :

# خدمات ریاضیدانان ایرانی

گردآورنده: حسین هاشمی، دبیر ریاضی دبیرستانهای آبادان

چهارمین دانشمند بزرگ ایرانی ابوریحان بیرونی است که در دوران جوانی در نزد قابوس و شمگیر در گرگان بود. پس از آن در خدمت محمود غزنوی به افغانستان و هند رفت و چهل سال در هندوستان بفرافراغت علوم مختلف عصر خویش پرداخت. بیرونی در میان دانشمندان عصر خویش شهرتی بسزا داشت و اهالی مغرب زمین او را جزء بزرگترین دانشمندان و فلاسفه جهان بشمار میآوردند. تألیفات و تفسیفات او بسیار و تقریباً شامل همه علوم از قبیل فلسفه، فیزیک، زمین‌شناسی، ریاضی و نجوم میباشند. فرضیه قوه جاذبه زمین و حرکات وضعی و انتقالی آن از اوست که شش قرن بعد بوسیله کپرنیک و نیوتون به اثبات رسیده است. بیرونی برای اولین بار وزن مخصوص دوازده جسم را اندازه گیری کرد و جدولی برای آنها ترتیب داد. شعاع کره زمین را اندازه گرفت (۱) و بالاخره شیب مدار خورشید را نسبت به سطح استوا با چنان دقتی حساب کرد که بانبودن وسائل دقیق علمی در آن زمان یکی از شاهکارهای علم ریاضی بشمار میرود (۲).

خوشبختانه قدر او در جهان دانش مجهول نماند. اکثر مستشرقین اروپائی و ایران شناسان آمریکائی در نوشته‌های خود از او به احترام یاد کرده‌اند. ذکر آن اظهار نظرهای حوصله‌آوردنده و مقاله خارج و بهتر است که صحبت از بیرونی را بهمین جا خاتمه دهیم و قدم در سیر تکامل علم جبر بگذاریم.

این علم که در گذشته هسته‌های اولیه آن وسیله دانشمندان شاعر پیشه هند پایه گذاری شده بود چنانکه دیدیم بهمت خوارزمی برودخانه عظیمی از دانش بشری تبدیل گردید و در بستر خود افکار دانشمندان ملل مختلف اسلامی بخصوص ایرانیان را با خود همراه کرد. وقتی که این رود عظیم با افکار و اندیشه‌های فیلسوف، شاعر، ریاضی دان ایرانی عمر خیام تلاقی کرد دارای چنان ابهت و عظمتی شد که تا قرن ۱۷ زمینهای پهناور دوستداران دانش را بپنهانی آبیاری میکرد.

اگر این قول و ایراشتراس فیلسوف بزرگ آلمانی را بپذیریم که میگوید: «شایسته‌ترین ریاضیدان کسی است که کمی هم شاعر باشد»، یقیناً خیام در قله پر عظمت دانش قرار دارد.

از مطالعه شرح حال و از فحوای رباعیات حکیمانه او چنین مستفاد میشود که خیام مردی منزوی و گوشه نشین بوده و هرگز با کسی انس و الفت نداشته است. مورخین او را بدلیل اینکه آثار زیادی از خود باقی نگذاشته است به بخل و حسد متهم کرده‌اند. در صورتی که در واقع خیام بعلت وسعت اندیشه و دارا بودن مشرب صوفیانه معلومات خود را در مقابل مجهولات دانش بشری خرد و ناچیز می‌شمرده و آنها را قابل عرضه نمیدانسته است. با این حال کتاب جبر و مقابله‌ای که از او باقیمانده است نمونه بسیار باارزشی از نبوغ فکری و قدرت خلاقه او در تهیه و تنظیم مطالب علمی میباشد. این کتاب، که در نیمه دوم قرن نوزدهم بوسیله وپکه مستشرق معروف فرانسوی چاپ و منتشر شده است، دارای چنان دقت و مهارتی در دسته‌بندی و حل معادلات درجه دوم و سوم است که اگر قبل از قرن هفدهم



در اروپا رایج میشد، دکارت و توماس بیکر محتاج بکشف مجدد آنها نمیشدند. (۳)

خدمت دیگر خیام که باید از آن به افتخار یاد کرد وضع تاریخ جلالی است. مطابق نوشته دایرةالمعارف اسلامی در سال ۱۰۷۴ میلادی عید نوروز مصادف میشد با سیزدهم ماه اسفند بدین مناسبت هیئتی از منجمان اسلامی تحت نظر عمر خیام مأمور اصلاح تقویم اسلامی میشوند و آن تقویم را به پاس قدردانی به نام پادشاه عصر، سلطان جلال الدین ملکشاه، جلالی مینامند. این تقویم که در هر ۳۷۷۰ سال فقط یک روز با حرکت حقیقی خورشید اختلاف دارد بمراتب از تقویم گرگوار که پانصد سال بعد از آن عیسویان تنظیم کردند دقیقتر است چه تقویم گرگوار در هر ۲۲۳۰ سال یک روز اختلاف پیدا میکند.

بالاخره آخرین اکتشاف علمی خیام که مستشرقین روسی آنرا عنوان کرده اند بسط دوجمله ای  $(x+a)^n$  که تاکنون اختراع آنرا به نیوتن نسبت میدادند و همچنین مثلث متشکل از ضرایب این بسط است که در تاریخ ریاضیات به نام مثلث پاسکال معروف است. و از این پس به نام مثلث خیام خوانده خواهد شد. خیام به اینکه می توان هندسه هایی غیر از هندسه اقلیدسی بنا کرد واقف بوده است چه از اوست که نوشته است: « مطمئنم که بدون قبول اصل اقلیدس می توان هندسه دیگری به وجود آورد » اما اینکه چرا دنبال کار را رها کرده و چنین هندسه ای بنیاد نکرده است معلوم نیست.

ششمین دانشمند بزرگ ایرانی که ما و جهانیان همه مدیون وی هستیم خواجه نصرالدین طوسی است. او که در اوایل قرن دوازدهم میلادی در شهر طوس به دنیا آمد مقدمات علوم ریاضی و نجوم را نزد استادان عصر خویش بیاموخت و در سن بیست و دو سالگی پس از فراغ از تحصیل اجازه روایت گرفت.

خواجه نصیرالدین از بزرگترین دانشمندان عصر خویش بود در حدود پنجاه جلد کتاب در رشته های مختلف علوم نوشته است که از بین آنها پنج جلد مربوط به علوم ریاضی و نجوم است. نخستین کسی است که علم مثلثات را بعنوان یک دانش مستقل مورد مطالعه قرار داد و بدان وسعت فوق العاده بخشید. کتاب او راجع به این علم شکل القطاع نام دارد که مانند کلیه دانشمندان سلف خود آنرا به زبان عربی نوشته است. در این کتاب روابط بین اجزاء شش گانه مثلث با تعاریفی جامع و مانع بیان شده و موارد استعمال آنها نیز ذکر گردیده است. کتاب شکل القطاع در اواخر قرن نوزدهم بزبان فرانسه ترجمه شده و با متن عربی آن در قسطنطنیه بچاپ رسیده است.

شاید ذکر این نکته بيمورد نباشد که در کتب یونانی هیچ يك از روابط مثلثاتی مورد استفاده قرار نگرفته است. هندیان نیز جز سینوس نسبت های دیگر مثلثاتی را نمی شناختند. بدین ترتیب اختراع علم مثلثات از شاهکارهای علمای اسلامی است که زحمات آنان وسیله خواجه نصیرالدین طوسی جمع آوری و بدانش جدیدی بنام مثلثات تبدیل شده است. البته خواجه علاوه بر مثلثات در نجوم نیز دست داشت و رصدخانه مشهور مراغه را بدستور هلاکو خان مغول بنا کرد مطابق گفته مورخان این رصدخانه دارای کتابخانه بسیار بزرگی شامل چهارصد هزار جلد کتاب بوده است. به عدد چهار هزار خوب توجه کنید و بخاطر بیاورید که در آن زمان صنعت چاپ اختراع نشده بود.

بالاخره آخرین ریاضی دان مشهور ایرانی که ضمناً بزرگترین آنها نیز میباشد استاد غیاث الدین جمشید کاشانی است که از دانشمندان بنام قرن پانزدهم بوده و آثار او در ریاضیات مایه تحسین و اعجاب کلیه دانشمندان امروزی میباشد. مهمترین آنها دو کتاب بنامهای رساله محیطیه و مفتاح الحساب است که استاد در آنها برای اولین بار در

تاریخ بشری بکشف و استعمال کسرهای اعشاری می پردازد .

متأسفانه اروپائیان اختراع کسر اعشاری را به **فرانسوا ویت** فرانسوی یا به **سیمون ستون** بلژیکی نسبت میدهند. با توجه باینکه **جمشید کاشانی** زماناً ۱۵۶ سال از **ویت** فرانسوی و ۱۶۲ سال از **ستون** بلژیکی قدیمی تر بوده است این قضاوت اروپائیان جز بعدم اطلاع یا تعصب بچیز دیگری تعبیر نمی گردد . به ویژه که نسخه های خطی کتب فوق هم اکنون در کتابخانه های معتبر دنیا موجود است . و کتاب **مفتاح الحساب** بچاپ نیز رسیده است . و اما این انتقاد بخود ما بیشتر از خارجیا وارد است در هیچ يك از کتب درسی موجود در کشور نامی از **غیاث الدین جمشید** برده نشده و یقیناً بعضی از شما خوانندگان گرامی نیز او را نمی شناسید .

دیگر از کارهای مهم **غیاث الدین جمشید** محاسبه عدد  $\pi$  است این عدد که حتی اطفال دبستانی با آن آشنا هستند و در محاسبات خود آنرا بکار میبرند سرگذشت جالب و شنیدنی دارد :

از دو هزار سال قبل از میلاد بشر پی برده بود که نسبت محیط هردایره بر قطر آن از عدد ۳ بیشتر است و از این رو دانشمندان ریاضی کوشش میکردند که مقدار حقیقی آنرا پیدا کنند در این راه مغزهایی مانند **اقلیدس** ارشمیدس از یونانیان **آریاباتا** از هند و **چوشنگه** شیه از چین و بالاخره **خوارزمی** - **ابوالوفا** - و **بیرونی** از ایران زحمات فراوانی کشیدند که حاصل رنج آنها منجر میشود به محاسبه عدد پی تا دو رقم اعشار بمعنی ۳٫۱۴ در حقیقت همان که اطفال دبستانی ما آنرا حفظ دارند .

**استاد غیاث الدین جمشید** ضمن یادآوری خدمات آنان متذکر میشود که چون این اعمال مختل بود خواستم عدد  $\pi$  را با چنان دقتی حساب کنم که اگر منظور محاسبه دایره ای باشد که قطرش ۶۰۰ هزار برابر قطر زمین فرض شود اختلاف محاسبه از مقدار حقیقی از ضحامت يك مو کمتر باشد .

پس از ذکر این مقدمه استاد بمحاسبه عدد  $\pi$  میپردازد که جزئیات آن موضوع کتابی است بنام رساله محیطیه که در پیش نامی از آن بردیم .

خوشبختانه نسخه اصلی این کتاب بخط خود جمشید هم اکنون در کتابخانه آستان رضوی در مشهد موجود است . در این کتاب **غیاث الدین جمشید** با يك روش مخصوص که خود واضع آنست مقدار عدد  $\pi$  را تا شانزده رقم اعشار محاسبه کرده است . این دقت در محاسبه از لحاظ علمی در حدود دو قرن پس از وی بی رقیب بوده است (۴)

**جمشید کاشانی** کتابی نیز در نجوم نوشته است که نسخه خطی آن در کتابخانه دانشگاه پرینستون در شهر پرینستون از ایالت نیوجرسی آمریکا می باشد .

امیدوارم که ذکر گذشته درخشان ایران ما را بسی و کوشش بیشتری وادار کند تا مقام ایران در بین کشورهای متمدن جهان آنچنانکه درخور و متناسب با سابقه پر درخشان او است بدست آید . به امید آرزو

$$1 - \text{فرمولی که بیرونی برای محاسبه شعاع زمین بکار برده} \quad R = h \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

۲ - مقدار آنرا بیرونی ۲۷۳۵ حساب کرده که اندازه حقیقی آن ۲۷۲۳ است .

۳ - خیام و اکثر ریاضی دانان اسلامی با حل هندسی معادلات درجه دوم وسوم آشنائی داشتند و اغلب آنها را با استفاده از مقاطع مخروطی حل میکردند .

۴ - عددی را که استاد **غیاث الدین جمشید** تا شانزده رقم بعد از ممیز برای  $\pi$  بدست آورده ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ است



## آیامی دانید که

$\pi$  تا ۱۰۰,۲۶۵ رقم بعد از ممیز حساب شده است ؟

رقم بعد از ممیز اشتباه کرده است .

در سال ۱۹۴۷ ژان ورنج و فرگوسن ،  $\pi$  را تا ۸۰۸

رقم بعد از ممیز حساب کردند که به اندازه ای که در محاسبه  $e$  پیش رفته بودند برسند .

همه این محاسبات ، من جمله محاسبه شنکس و فرگوسن به وسیله اعمال بر روی کاغذ و احیاناً ماشینهای ساده محاسبه انجام گرفته است . اما پس از اختراع ماشینهای محاسبه الکترونیکی ، آنها را به کار محاسبه  $\pi$  گرفتند و در این کار چنین پیش رفتند :

| تعداد رقمهای<br>بعد از ممیز | تاریخ                                  |
|-----------------------------|----------------------------------------|
| ۱۱۲۰                        | ژوئن ۱۹۴۹                              |
| ۲۰۳۷                        | سپتامبر ۱۹۴۹ (در ۷۰ ساعت)              |
| ۳۰۹۳                        | نوامبر و ژانویه ۱۹۵۴ (فقط در ۱۳ دقیقه) |
| ۱۰۰۰۰                       | ژانویه ۱۹۵۸ (در ۱ ساعت و ۴۰ دقیقه)     |
| ۱۶۱۶۷                       | ژوئیه ۱۹۵۹                             |

آخرین محاسبه همان است که در ابتدای این مقال به آن اشاره شد .

سیمون نیوکام ، ریاضیدان و منجم ، درباره اندازه  $\pi$  اظهار کرده است که مقدار آن تا ده رقم بعد از ممیز کافی است تا بتوانیم محیط کره زمین را با تقریب کمتر از کسری از سانتیمتر محاسبه کنیم و اندازه آن تاسی رقم بعد از ممیز ، محیط جهان شناخته شده را با دقت میکروسکوپی معلوم می سازد !

با توجه به این مطلب ، پس چرا در محاسبه  $\pi$  آنقدر پیش می روند و به ظاهر کار عبث می کنند .

يك دليل عملی این موضوع آن است که درستی ماشینهای محاسبه الکترونیکی جدید را می توان با مسائلی که جواب آنها معلوم است و برای محاسبه در ماشین آماده شده است امتحان کرد مثلاً اگر حالا ماشین جدیدی را برای محاسبه  $\pi$  تا ۱۰۰,۲۶۵ رقم بعد از ممیز بکار ببریم نتیجه ای که به دست می آید همان باشد که قبلاً می دانستیم ، در واقع صحت آن ماشین را امتحان کرده ایم . در این صورت چرا محاسبه را با این ماشین پیشتر نبریم تا بتوانیم ماشینهای جدید آتی را امتحان کنیم .

از این دلیل که بگذریم ، جالبترین دلیل - البته جالبترین دلیل برای ریاضیدانان - آن است که با محاسبه واقعی ، ببینند

دانیل شنکس و ژان ورنج مقدار  $\pi$  و  $e$  را تا

۱۰۰,۲۶۵ رقم بعد از ممیز با ماشین آی ، بی ، ام ، سیستم ۷۰۹۰ حساب کرده اند . این محاسبه در بیست و نهم ژوئیه سال ۱۹۶۱ در نیویورک انجام گرفته است . مدتی که صرف محاسبه  $\pi$  شده ۸ ساعت و ۴۳ دقیقه بوده است ، در حالی که محاسبه  $e$  فقط ۲۵ ساعت وقت لازم داشته است .

قبل از آنکه بگوییم چنین محاسباتی اصولاً چرا انجام میگردد بد نیست نظری بگذشته در این مورد بیندازیم .

ارشمیدس مقدار  $\pi$  را بین  $\frac{31}{7}$  و  $\frac{355}{113}$  معین کرد .

مصریها مقدار آنرا ۳٫۱۶ حساب کرده بودند . یکی از منجمان چینی به نام تسوچانگ چیه کسر ساده ای در قرن پنجم کشف کرد که مقدار  $\pi$  را تا ۶ رقم بعد از ممیز به دقت معین می کرد :

$$\frac{355}{113} = 3.141592 (9)$$

غیاث الدین جمشید کاشانی یکی از ریاضیدانان برجسته

ایرانی که در این شماره از او یادی شده است در قرن پانزدهم میلادی  $\pi$  را تا شانزده رقم بعد از ممیز حساب کرد . جدول زیرین شامل نام کسانی است که به محاسبه  $\pi$  دست زده اند .

| نام              | سال              | تعداد رقمهای بعد از ممیز |
|------------------|------------------|--------------------------|
| آبراهام شارپ     | ۱۶۹۹             | ۷۲                       |
| فوت دولانی       | ۱۷۱۹             | ۱۲۷                      |
| ژرژون وگا        | ۱۷۹۴             | ۱۴۰                      |
| ناشناس           | اواخر قرن هیجدهم | ۱۵۲                      |
| ویلیام راتر فورد | ۱۸۴۱             | ۲۰۸                      |
| و . لهمان        | ۱۸۵۳             | ۲۶۱                      |

در تعداد ارقام بعد از ممیز بیشتر از همه ویلیام شنکس

پیش رفته است . وی از سال ۱۸۵۳ تا ۱۸۷۳ ، مدت ۲۰ سال ، به کار محاسبه  $\pi$  مشغول بود و سرانجام تا ۷۰۷ رقم بعد از ممیز آن را حساب کرد . امارد سال ۱۹۴۵ ، د.ف. فرگوسن معلوم ساخت که شنکس ضمن محاسبه خود در پانصد و بیست و هشتمین

۱- درباره آنکه این کسر به وسیله تسوچانگ چینی یا متروس هلندی تعیین شده است اتفاق نظر وجود ندارد . در این باره باید تحقیق بیشتری گردد .

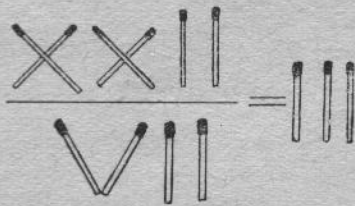
که آیا اعدادی نظیر  $\pi$  و  $\sqrt{2}$  و  $e$  ، عدد عادی هستند یا نه . یعنی آیا ارقام  $۰.۷۰۵۷۰۶۰۶۰۵۷۰۸۰۹۰۰$  در آنها ، پس از ممیز ، طبق نظم آماری توزیع شده است یا نه (یعنی تعداد تکرار هر رقم تقریباً  $۰.۱۰\%$  عده ارقام است یا نه)

تا  $۱۶۰۰۰$  رقم بعد از ممیز در اندازه  $\pi$  ، توزیع غیر عادی مشاهده نشده است . یعنی بنظر می آید که  $\pi$  عددی عادی باشد ولی تا حال اثباتی جهت عادی بودن آن عدد نشده است و معلوم نیست که در محاسبه بینهایت رقم بعد از ممیز این توزیع ادامه داشته باشد .

شنکس وورنچ پیش بینی کرده اند که در عرض ۵ تا ۷ سال آتیه ماشینهای محاسبه ای به بازار خواهد آمد که قادرند  $\pi$  را تا یک میلیون رقم بعد از ممیز حساب کنند . باید در نظر داشت که ماشینی که برای محاسبه  $\pi$  تا  $۱۰۰۶۲۵$  رقم بعد از ممیز به کار رفته و محاسبه را در ۸ ساعت و ۴۳ دقیقه انجام داده است ، ماهها وقت لازم دارد تا محاسبه  $\pi$  را تا یک میلیون رقم بعد از ممیز انجام دهد .

یادداشت : در آلمان به عدد  $\pi$  تا ۳۵ رقم بعد از ممیز ، عدد لودولف میگویند. دلیل آن این است که لودولف ولف و ان سولن Ludolph van Ceulen ، یکی از ریاضیدانان آنجا در سال ۱۵۹۶ عدد  $\pi$  را تا ۳۵ رقم بعد از ممیز حساب کرد و تقاضا داشت که پس از مرگ ، این عدد بر روی سنگ قبرش حک گردد . وی به سن هفتادسالگی درگذشت و سنگ قبرش با این عدد مزین گشت .

از مجله ریاضیات تفریحی ترجمه : ج.ش. آوری  
\* \* \*  
حال که تا اندازه ای با تاریخچه محاسبه  $\pi$  آشنا شدید ، این مسئله را درباره آن حل کنید :



با حرکت یک چوب کبریت این تساوی را درست کنید .

## مسئله سوزن بوفن

روش دیگری برای تعیین عدد  $\pi$  پس از بوجود آمدن علم احتمالات با طرح مسئله سوزن بوجود آمد . اگر صفحه مستوی را با خطوط نازک و متوازی و متساوی الفاصله (فاصله  $l$ ) خط کشی کنیم و سوزنهای یکنواخت (یا چوب کبریت های استوانه ای شکل) بطول  $h$  را بر حسب تصادف (نه به قصد معین) روی این صفحه بریزیم احتمال تعداد دفعاتی که این سوزنها خطوط را قطع می کنند به تعداد دفعاتی که سوزنها را روی صفحه ریخته ایم برابر  $p = \frac{2l}{\pi h}$  است . این مسئله را اولین بار بوفن طبیعی دان فرانسیس در سال ۱۷۳۳ میلادی مطرح و در سال ۱۷۷۷ آنرا حل نمود .

در سالهای ۱۸۵۰ - ۱۸۵۲ میلادی ولف منجم و ریاضی دان سوئسی این آزمایش را با خطوطی بفواصل  $I = 4.05 \text{ Cm}$  و سوزنهایی به بلندی  $h = 3.6 \text{ Cm}$  انجام داد . طبق فرمول فوق  $P = \frac{2 \times 3.6}{4.05 \pi} = \frac{72}{40.5 \pi}$  است . ولف در این تجربه ۵۰۰۰ بار سوزن را روی صفحه مذکور انداخت و ملاحظه کرد ۲۵۳۲ بار سوزن خطوط را قطع کرده یا مماس بر آن بود بنابراین این فرمول زیر حاصل شد :

$$P = \frac{\text{تعداد دفعاتی که سوزن خطها را قطع کرده}}{\text{تعداد کلیه دفعات}} = \frac{2532}{5000} = 0.5064$$

حال از فرمول  $0.5064 = \frac{72}{40.5 \pi}$  عدد  $\pi$  برابر با  $3.1596 = \pi$  که با عدد  $\pi$  حقیقی  $3.1415 - 3.1596 = 0.0181$  اختلاف دارد بدست می آید .

در سال ۱۸۵۵ نیز همین آزمایش تکرار شد ، البته با سوزنهایی بطول ۳ سانتیمتر و خطوطی بفاصله ۵ سانتیمتر ، و مقداری که برای  $\pi$  بدست آمد  $3.1412$  بود . پس بطور خلاصه اگر صفحه ای را با خطوط نازک و متساوی الفاصله خط کشی کنیم و تعدادی سوزن ، به بلندی فاصله خطوط ، را در این صفحه بریزیم و تعداد کلیه دفعات ریختن سوزن ها را بر تعداد دفعاتی که سوزنها خطوط را قطع کرده اند تقسیم کنیم عدد  $\frac{\pi}{4}$  حاصل میشود . شك نیست هر اندازه تجربه را تکرار کنیم طبق قوانین احتمالات مقدار  $\pi$  دقیقتر بدست خواهد آمد . مثلاً با ۵۰۰ سوزن عمل را یکبار بار تکرار کرده و عدد  $\pi$  را مساوی  $3.14159266$  بدست آورده اند که تا هفت رقم بعد از ممیز صحیح است .

ایرج ادیبی



## همنهشت های درجه دوم

پرویز شهریاری  
با استفاده از نوشته . امیل بورل

زیرا  $y^2$  نمیتواند بر عدد اول  $p$  قابل قسمت باشد مگر اینکه  $y$  بر  $p$  قابل قسمت باشد . اکنون به همنهشت (۵) مراجعه می کنیم که در آن  $y$  صفر است ، یعنی يك همنهشت درجه اول خواهد بود و همانطور که میدانیم تنها يك ریشه خواهد داشت . این ریشه صفر نیست مگر اینکه  $b$  صفر باشد . ولی در حالتی که  $b$  صفر است ، چون  $r$  صفر و  $a$  مخالف صفر است  $c$  هم صفر میشود و همنهشت به  $x^2 \equiv 0$  تبدیل میشود .

**حالت دوم -**  $ax^2 - \epsilon ac = b^2$  نسبت به مدول  $p$  صفر نیست . برای تجزیه این همنهشت رزیدوهای مربعات  $p-1$  عدد اولیه را محاسبه می کنیم :

$$(p-1)^2, 2^2, 3^2, \dots, (p-1)^2 \quad (7)$$

این رزیدوها را رزیدوهای کوادراتیک برای مدول  $p$  مینامند . از این رزیدوها دو عدد را چنان انتخاب میکنیم که نسبت به مدول  $p$  مساوی باشند . اگر این دو عدد را  $m^2$  و  $n^2$  بنامیم داریم :

$$m^2 - n^2 \equiv 0 \pmod{p} \quad (8)$$

و یا :

$$(m+n)(m-n) \equiv 0 \pmod{p} \quad (9)$$

اما چون  $m$  و  $p$  هر دو از  $u$  کوچکترند  $m-n$  نمیتواند بر  $p$  قابل قسمت باشد و خواهیم داشت :

$$m+n \equiv 0 \pmod{p} \quad (10)$$

رزیدوهای (۷) دو بدو نسبت به مدول  $p$  مساویند یعنی داریم :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} 1^2 \equiv (p-1)^2 \\ 2^2 \equiv (p-2)^2 \\ \dots \dots \dots \\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \end{array} \right. \pmod{p}$$

این همنهشت ها تنها شامل اعداد صحیح اند ، زیرا  $p-1$  و  $p+1$  اعدادی زوج هستند .

باین ترتیب نتیجه میشود که تعداد رزیدو -

کوادراتیکهای مشخص برای مدول اول  $p$  مساوی  $\frac{p-1}{2}$

اکنون به همنهشت های درجه دوم میپردازیم . شکل عمومی يك همنهشت درجه دوم چنین است :

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p} \quad (1)$$

فرض می کنیم که  $a$  صفر نباشد (یعنی بر  $p$  قابل قسمت نباشد) زیرا در آن صورت حاصل ضرب  $ax^2$  نسبت به مدول  $p$  صفر میشود و همنهشت به درجه اول تبدیل میگردد .

میتوانیم طرفین همنهشت را در  $a$  ضرب کنیم (فرض میکنیم که  $p$  مساوی ۲ نباشد یعنی عدد اول غیرزوج باشد ، در حالتی که مدول  $p$  مساوی ۲ باشد میتوان مستقیماً و بسادگی آنرا مطالعه کرد) :

$$\epsilon a(ax^2 + bx + c) \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

این رابطه نمیتواند صحیح نباشد مگر اینکه رابطه (۱) برقرار باشد ، زیرا  $p$  عددی است اول و حاصل ضرب دو عامل طرف اول رابطه (۲) نمیتواند بر  $p$  قابل قسمت باشد مگر اینکه یکی از آنها بر  $p$  قابل قسمت باشد و میدانیم که عامل  $a$  بر  $p$  قابل قسمت نیست .

با عملیات ساده و معمولی جبر . همنهشت (۲) بصورت زیر درمیآید :

$$(2ax+b)^2 \equiv b^2 - \epsilon ac \pmod{p} \quad (3)$$

یعنی :

$$y^2 \equiv r \pmod{p} \quad (4)$$

بافرض :

$$2ax+b \equiv y \pmod{p} \quad (5)$$

$$b^2 - \epsilon ac \equiv r \pmod{p} \quad (6)$$

باتوجه بر رابطه (۶) میتوان  $r$  را مثبت و مقداری بین صفر

و  $p-1$  در نظر گرفت .

بدین ترتیب میتوان يك یا چند ریشه همنهشت (۴) را پیدا کرد و با قرار دادن هر يك از مقادیر  $y$  در همنهشت (۵) مقداری برای  $x$  بدست میآید که یکی از جوابهای (۱) میباشد .

دو حالت در نظر میگیریم :

**حالت اول -**

$$b^2 - \epsilon ac = r = 0$$

در این حالت همنهشت (۴) تنها جواب  $y \equiv 0$  را میدهد ،

$$(\mathbf{x} \mathbf{y})^{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r} \mathbf{r}'$$

(۱۲) ۱۹۴۹۲۹۲۹۴۹۱

(۱۳) ۱۹۴۹۹۵۹۳۹۳۹۵۹۹۴۹۱

$$\begin{aligned} x^r &\equiv r \pmod{p} \\ y^r &\equiv r' \pmod{p} \end{aligned}$$

$$\log(3x+2) + \log(x-1) = 2 \log 11$$

$$(3x+2)+(5x-1)=(2)(11)$$

$$YX = 21$$

$$X=3$$



# ادعای ثابت نشده فرما

افراسیاب ملکی

دبیر دبیرستانهای تفرش

دور شدیم. فرما هنگام مطالعه چاپ جدید کتاب حساب دیوفا نتس ضمن مشاهده دستور اوراق به جوابهای صحیح معادله  $x^2 + y^2 = z^2$  حاشیه‌ای بر آن کتاب نوشت که مطالب همین حاشیه قریب سه قرن افکار ریاضیدانان نامی را بخود مشغول ساخته است جمله‌ای که وی نوشته بود چنین است :

« درست است که معادله  $x^2 + y^2 = z^2$  جوابهای صحیح بیشماری دارد ، اما معادله  $x^n + y^n = z^n$  در حالت  $n > 2$  هیچگاه جواب صحیح ندارد. برآستی استدلال شگفت انگیزی برای اثبات آن وجود دارد که حاشیه کتاب کوچکتر از آنست که استدلال در آن نوشته شود » .

پس از فوت فرما کتب او بدست اهل تحقیق افتاد و مطالب حاشیه در این کتاب آشکار گشت . از آن زمان تاکنون کوشش همه ریاضی دانان نامی و افراد عادی برای یافتن استدلالی که فرما آن را ننوشته است بجائی نرسیده است . اولر ، لاگرانژ ، دیریکله ، کوهر ، ریمان که نام همه آنها را شنیده‌اید اوقات گرانبهائی صرف مسئله فرما نمودند . اولر در حالت:  $x=4$  و  $n=3$  و دیریکله در حالت  $n=5$  عدم وجود جواب صحیح را برای معادله فرما اثبات نموده‌اند . تاکنون صحت مطلبی که فرما ادعا کرده تا  $n=269$  به ثبوت رسیده است ولی با اینهمه اثبات آن در حالت کلی میسر نگردیده است . در سال ۱۹۰۸ دکتر ولسفکول آلمانی، که خود کوشش زیادی در مورد اثبات قضیه فرما نموده بود ، جائزهای بمبلغ ۱۰۰۰۰۰ مارک برای اثبات کننده آن معین کرد. این موجب شد که بار دیگر سروصدای زیادی براه افتد و رساله‌ها در مورد مسئله نگاشته شود بدون شك میتوان کتابخانه کوچکی از تمام این نوشته‌ها . تشکیل داد ولی باز انگیزه پول نیز نتوانست کمکی به حل مسئله بنماید و تمام کوششها بی‌ثمر ماند . عده‌ای معتقدند که ممکن است فرما خود نیز دچار اشتباه شده باشد و امکان دارد که عدم صحت قضیه روزی مشاهده شود یعنی بتوان اعدادی یافت که در معادله فرما صدق کنند .

جهت آشنائی بیشتر با معادله فرما بعضی مطالب مربوط بآن بیان میگردد تا شاید کمکی بفهم بیشتر مسئله و حل آن باشد :

$$x^n + y^n = z^n \quad x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0$$

مصریان قدیم به این واقف بودند که مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ و یا متناسب با آن مثلثی قائم الزاویه است و از این خاصیت در کارهای عملی استفاده میکردند. فیثاغورس قضیه مشهور خود را در مورد مثلث قائم الزاویه اثبات کرد : اگر وتر مثلث را  $z$  و اضلاع زاویه قائمه را  $x$  و  $y$  بنامیم رابطه  $x^2 + y^2 = z^2$  میان طول اضلاع زاویه قائمه و وتر مثلث برقرار است. دیوفانتس باین فکر افتاد که آیا تنها مثلثهائی که طول اضلاع آنها متناسب با اعداد ۳ و ۴ و ۵ است قائم الزاویه‌اند یا جوابهای دیگری نیز وجود دارد بعبارت دیگر، آیا جوابهای صحیح و مثبت معادله (۱)  $x^2 + y^2 = z^2$  تنها اعداد متناسب با ۳ و ۴ و ۵ است ؟ وی باین نتیجه رسید که جوابهای دیگری نیز امکان دارد و دستورهای کلی زیر را جهت تعیین جوابهای معادله (۱) بدست آورد:

$$x = u + \sqrt{2uv}$$

$$y = v + \sqrt{2uv}$$

$$z = u + v + \sqrt{2uv}$$

هرگاه  $2uv$  مجذور کامل باشد ،  $z, y, x$  اعداد درست خواهند بود . مثلاً برای  $u=8$  و  $v=19$  نتیجه میگردد :

$$x=17 \quad y=5 \quad z=13$$

هرگاه  $z, y, x$  مقسوم علیه مشترکی نداشته باشند ، مانند مثال فوق ، آنها را سه تائی ابتدائی ، در غیر این صورت آنها را سه تائی ثانوی فیثاغورثی مینامند . دستور ساده تری نیز خود فیثاغورث ابداع کرده است.

$$x = p^2 - q^2$$

$$y = 2pq$$

$$z = p^2 + q^2$$

در این روابط  $p, q$  هر عدد دلخواهی می‌توانند باشند. دستور زیر بعضی از جوابهای ابتدائی را بر حسب يك پارامتر معلوم میدارد:

$$x = 2n^2 + 2n$$

$$y = 2n + 1$$

$$z = 2n^2 + 2n + 1$$

کمی از بحث اصلی خود که بررسی مسئله بزرگ فرما است

طرح زیر به وسیله آقای دکتر علیرضا امیر معز تهیه شده است که در آوریل ۱۹۶۲ در هشتمین شماره مجله ریاضیات تفریحی چاپ شده است. خصوصیت آن این است که در زیر تصویر خیام، همان طور که می بینید، نوشته شده است: «خیام و موازیها» و این مسبق به آن است که خیام وجود هندسه های غیر اقلیدسی را پیش بینی می کرده است. (به مقاله خدمات ریاضیدانان ایرانی در همین شماره رجوع فرمائید).



عمر خیام  
و موازیها



رنه دکارت  
و مختصات کارتیزین



آلبرت انیشتاین  
و بعد چهارم

آقای دکتر علیرضا امیر معز یکی از ریاضیدانان معاصر ایرانی مقیم آمریکا است که جناب دکتر هشتودی در شماره ۷ مجله یکان به نام مشارالیه اشاره فرموده اند.

داریم:  $\frac{y}{x} < 1$ ، از آنجا:

$$\frac{y^{n-2}}{x^{n-2}} < 1 \quad \text{یا} \quad (۳) \quad \frac{y^n}{x^n} < \frac{y^2}{x^2}$$

همچنین داریم:  $\frac{z}{x} > 1$  از آنجا:

$$\frac{z^{n-2}}{x^{n-2}} > 1 \quad \text{یا} \quad (۴) \quad \frac{z^n}{x^n} > \frac{z^2}{x^2}$$

باتوجه بنامساویهای ۳ و ۴ نتیجه میگردد:

$$1 + \frac{y^n}{x^n} < 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{z^2}{x^2} < \frac{z^n}{x^n}$$

$$1 + \frac{y^n}{x^n} < \frac{z^n}{x^n}$$

$$x^n + y^n < z^n \quad \text{در نتیجه:}$$

و بدین طریق ثابت می شود که هیچگاه اعداد صحیحی

که جوابهای معادله فیثاغورسند نمیتوانند جواب معادله فرما باشند.

از آنچه گفته شد نباید چنین نتیجه بگیریم که چون ریاضی-

دانان بزرگی چون اولر نتوانسته اند مسئله فرما را حل کنند کوشش ما کوچکتران بجائی نخواهد رسید، بلکه باید بخود تلقین کنیم که ممکن است راه ساده ای برای اثبات ادعای فرما وجود داشته باشد و بکوشیم تا شاید افتخار کشف آن نصیب ما گردد.

اولاً  $x$  و  $y$  نمیتوانند مساوی باشند زیرا در این صورت:

$$x^n + y^n = x^n + x^n = 2x^n = z^n$$

$$\frac{z^n}{x^n} = 2 \quad \text{و} \quad \frac{z}{x} = \sqrt[n]{2}$$

چون  $x$  و  $z$  باید اعداد درست باشند، فقط در حالت  $n=1$  معادله اخیر جواب دارد. بنابراین همیشه میتوان فرض کرد که  $x > y$  از طرف دیگر، باسانی مشاهده میگردد که مقدار  $z$  باید در نامساوی زیر صدق کند:

$$(۲) \quad x < z < x + y$$

چون در صورت  $z = x + y$  نتیجه میشود:  $x^n + y^n < z^n$

با توجه به نامساوی (۲) میتوان اثبات کرد که هیچگاه

$y$  نمیتواند برابر يك یا دو باشد، چون در صورت  $y=1$

نتیجه میشود:  $x < z < x+1$  که در اینحال برای  $z$

جواب صحیح وجود ندارد و در حالت  $y=2$  باید  $x < z < x+2$

که تنها  $z = x+1$  میتواند باشد. اگر  $x$  زوج باشد، سمت

چپ معادله فرما زوج و سمت راست آن فرد است و در صورت

فرد بودن  $x$  عکس اینحال بوجود می آید که هیچگاه تساوی بوجود

نخواهد آمد.

مطلب مهم دیگری که درباره مسئله فرما می توان اثبات

کرد این که جوابهای معادله  $x^2 + y^2 = z^2$  نمیتوانند جوابهای

قضیه باشند و در اینحال نامساوی زیر برقرار است:

$$x^n + y^n < z^n$$

مطالب فوق را به این طریق می توان ثابت کرد:

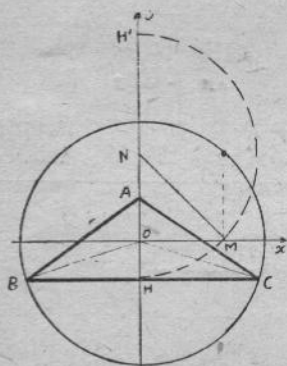


حل مسأله (( الحسن )) مسابقه مهتاز شماره اول

در شماره اول مجله ، تحت عنوان مسابقه ممتاز دو مسأله مطرح و آخرین مهلت قبول پاسخ آنها آخر مرداد ماه ۴۳ اعلام شده بود . راجع به حل این مسائل پاسخهای زیاد واصل شده است . بسیاری از پاسخ دهندگان مرتکب اشتباه شده اند و دیگران راه حلهائی ارائه داده اند که اغلب آنها مشابیه میباشد . در زیر پس از بیان صورت مسأله ، راه حل های مختلف که در پاسخ های رسیده مطرح شده است باطلاع خوانندگان میرسد و در شماره بعد بهترین حل اعلام میشود .

### حل کامل مسأله

راه اول - توسط آقای ع. راز تهران و با طریق  
مشابه افزریدن شهید پانجم ریاضی دبیرستان البرز (۵/۲۰)  
نصر الله اعتمادی (۱۸/۴۱) - مثلث ABC متساوی الساقین



است (چنانچه A روی محیط دایره باشد مثلث متساوی‌الاضلاع و اگر A به فاصله  $OA = d = \frac{R}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$  از مرکز واقع باشد مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین خواهد بود).

هرگاه مسأله را حل شده  
فرض نمائیم در مثلث قائم الزاویه

ABH با استفاده از خواص نیمساز روابط زیر داریم:

$$(v) \quad d \cdot BH = AB \cdot OH$$

$$(2) \text{ AB} \cdot \text{BH} = \text{R}^\gamma + \text{d} \cdot \text{OH}$$

(۲) قرار می‌دهیم :

$$(3) \quad d. \overline{BH}^Y = R^Y.OH + d. \overline{OH}^Y$$

و چون  $\overline{BH}^{\vee} = R^{\vee} - \overline{OH}^{\vee}$  پس

$$(\varepsilon) \overline{\text{OH}}^{\gamma} + \frac{R^{\gamma}}{\gamma d} \text{OH} - \frac{R^{\gamma}}{\gamma} = .$$

حال با استفاده از رابطه ( ۴ ) مثلث را بترتیب زیر رسم میکنیم :

(۱) روی دو خط متعامد  $ox$  و  $oy$  طولهای

ON =  $\frac{R^2}{\xi d}$  و OM =  $\frac{R}{\sqrt{\epsilon}}$  را جدا میکنیم ( تعیین ترسیمی

طوایحی  $\frac{R}{\sqrt{2}}$  و  $\frac{R^2}{4d}$  بآسانی میسر است ( طول MN برابر

مسألة « الحسن » با بیان هندسی :

دایره به مرکز  $O$  و با شعاع معلوم  $R$  و نقطه  $A$  واقع در داخل آن داده شده است، مثلث  $ABC$  را چنان بسازید که دو رأس  $B$  و  $C$  از آن بر دایره مفروض واقع بوده و  $O$  مرکز دایره نقطه تلاقی نیمسازهای داخلی آن باشد.

مرحله اول حل مسأله - مقدمه به آسانی ثابت میشود که مثلث متساوی الساقین بوده نیمساز  $AO$  در یک نقطه  $H$  بر ضلع  $BC$  عمود است و چنانچه طول  $OH$  معلوم باشد نقطه  $H$  و در نتیجه ضلع  $BC$  مشخص خواهد شد.

آقایان احمد ترابی از تهران (۱۳/۱۲/۴۲) - بیوک  
میرفتاحی از دانشکده فنی تبریز (۲۲/۱۲/۴۲) - محمد  
حسین تبیانی از فرهنگ عجبشیر (۲۰/۱/۴۳) - ناصر  
ربانی از مشهد (۲۶/۱) - غلامحسین راستگو از تبریز  
(۲۳/۴) - اسماعیل واعظ قاسمی پنجم ریاضی دبیرستان  
امیر کبیر لنگرود (۲۵/۴) - عبدالحسن پوریکتا پنجم ریاضی  
دبیرستان امیر کبیر لنگرود (۲/۵) - بیژن امامی آل آقا پنجم  
ریاضی دبیرستان مرآت (۱۳/۵) - حسین اصغائی چهارم  
ریاضی دبیرستان هدف ۳ (۱۳/۵) محمد حسن نجفی از  
دانشکده افسری (۲۷/۵) با استفاده از روابط متری بین اجزاء  
ثلث و محاسبات جبری و آقایان سید حجت ذاکر از تهران  
(۱۷/۱۲/۴۲) - ناصر علی فرح بخش (۲۵/۴) - بیژن غیور  
(۲۸/۴) - عباس چاوشی از اصفهان (۲۶/۱) با استفاده از روابط  
خطوط مثلثاتی زوایای مثلث طول OH را بر حسب  $d = OA + RO$   
شعاع دایره بدست آورده و بدون اینکه راه هندسی تعیین OH را  
شرح دهند حل مسأله را بایان یافته دانسته اند .

آقای بهمن مشهود از تهران (۴/۱۱) راه حلی مطرح ساخته‌اند که بعات عدم وضوح نوشته و اشکال رسم شده مفهوم نشد.

خواهد بود با :

$$MN = \frac{R}{\varepsilon d} \sqrt{R^2 + \varepsilon^2 d^2}$$

(۲) به مرکز N و به شعاع NM دایره‌ای رسم میکنیم تا خط oy را در H و H' قطع کند .

$$OH = NH - ON = -\frac{R^2}{\varepsilon d} + \frac{R}{\varepsilon d} \sqrt{R^2 + \varepsilon^2 d^2} \quad (۵)$$

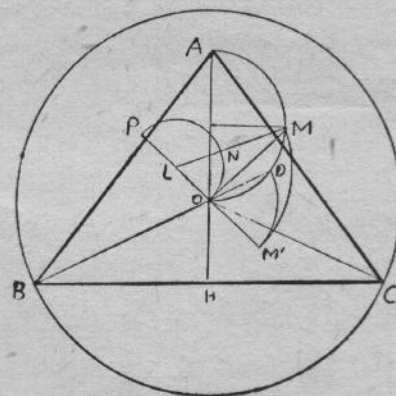
که همان جواب مثبت معادله (۴) میباشد .

(۳) در نقطه H عمودی بر AH اخراج میکنیم تا دایره به مرکز O و به شعاع R را در نقاط B و C قطع کند . مثلث ABC مثلث مطلوب است .

\*\*\*

**راه دوم - توسط آقای ناشناس و با راههای مشابه از آقایان مهدی حجازی ششم ریاضی دبیرستان البرز (۵/۱۳) اسدالله زرگر باشی (۵/۱۶) - سید حسین علوی زاده از تبریز (۵/۲۹)**

مسأله را حل شده فرض میکنیم در نقطه A عمودی بر BA اخراج میکنیم تا امتداد BO را در F قطع کند ، مثلث



OAF متساوی الساقین است و داریم  $AO = AF$  . در مثلث قائم الزاویه BAF روابط زیر را داریم :

$$\overline{AF}^2 = \overline{AO}^2 = FB \cdot FD = OD(2OD + R)$$

$$\text{بعبارت دیگر: } (۲OD + R) \cdot OD - d^2 = 0 \quad (۶)$$

با استفاده از رابطه (۶) مثلث را بترتیب زیر رسم میکنیم (۱) عمود منصف OA را رسم میکنیم تا نیمدایره به قطر

$$OA \text{ را در } M \text{ قطع کند ، } OM = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ است .}$$

(۲) در نقطه O عمودی بر OM اخراج مینمائیم و بر آن

$$OP = \frac{R}{2} \text{ را جدا میکنیم . از } M \text{ به } L \text{ وسط } OP \text{ وصل مینمائیم دایره به قطر } OP \text{ را در } N \text{ قطع میکند . داریم}$$

$$\overline{MO}^2 = MN(MN + \frac{R}{2}) \rightarrow 2\overline{MN}^2 + R \cdot MN - d^2 = 0$$

یکان

با مقایسه با رابطه (۵) نتیجه میشود  $MN = OD$  (۳) به شعاع LM و به مرکز L دایره‌ای رسم میکنیم تا امتداد LO را در M' قطع کند  $OM' = MN = OD$  (۴) به مرکز O و به شعاع OM' کمانی رسم میکنیم دایره به قطر OA را در D قطع میکند . (۵) امتداد DO دایره مفروض را در B قطع میکند و بعد از آن C بدست میآید .

\*\*\*

**راه سوم - توسط آقای حبیب صارمی ششم ریاضی دبیرستان مروی (۴۳/۱۲/۱۱) :**

مسأله را حل شده فرض میکنیم از نقطه A' قرینه A نسبت به O عمودی بر AO اخراج مینمائیم تا امتداد OB را در H' قطع کند پای عمود مرسوم از A' بر OB را با H و نقطه تلاقی دیگر OB را با دایره الحسن ( دایره مفروض ) با B' مینمائیم .  $A'B'$  موازی است (دوقطر چهارضلعی  $ABA'B'$  منصف یکدیگرند ) و نتیجه میشود که مثلث  $B'A'H'$  متساوی الساقین بوده و  $B'H = HH'$  و اگر T قرینه O نسبت به H باشد  $H'T = OB' = R$  . چنانچه قرینه O نسبت به A' باشد دایره به قطر  $OA = 2ON$  مکان هندسی نقطه T میباشد و چون چهارضلعی  $A'NH'T$  محاطی است  $OT \cdot OH' = OA' \cdot ON$

و با استفاده از این رابطه مثلث را بترتیب زیر رسم مینمائیم .

(۱) قرینه A' را نسبت به O و N قرینه O را نسبت به A' تعیین میکنیم .

(۲) دایره دلخواه  $(\alpha)$  را بر  $A'N$  میگذرانیم بطوریکه بتوان در آن وتر دلخواهی برابر با R شعاع دایره الحسن رسم نمود و دایره  $(\alpha')$  متحدالمرکز با دایره  $(\alpha)$  و مماس بر این وتر را رسم مینمائیم .

(۳) از O بر دایره  $(\alpha')$  مماس میکنیم که دایره  $(\alpha)$  را در  $T_1$  و  $H_1$  قطع میکند .

(۴) به مرکز O و

به شعاع  $OT_1$  کمانی

رسم میکنیم که دایره

به قطر ON را در T'

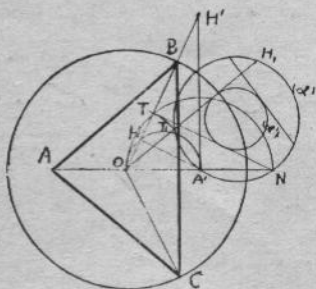
قطع مینماید .

(۵) امتداد OT

دایره الحسن را در

B قطع میکند و از

روی آن نقطه C بدست میآید .





### راه چهارم - آقای منصور تعلیمی پنجم ریاضی

دبیرستان دارالفنون ( ۴۳۴۲۰ ) ابتدا به طریق فوق ثابت کرده اند که در مثلث قائم الزاویه  $OA'H'$  طول  $TH'$  برابر با  $R$  میباشد آنگاه با استفاده از مسأله زیر راه رسم مثلث را بدست آورده اند :

**مسأله -** از مثلث قائم الزاویه  $ABC$  که  $A=90^\circ$

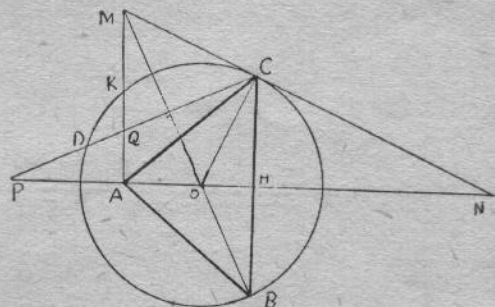
است طول ضلع  $AB$  معلوم میباشد و اگر  $P$  قرینه  $B$  نسبت به  $H$  ( پای ارتفاع  $AH$  ) باشد طول  $PC$  نیز معلوم است ، مثلث را رسم کنید .

برای رسم این مثلث نتیجه گرفته اند که دایره به مرکز  $B$  و به شعاع  $BN=AB/\sqrt{2}$  بر دایره به قطر  $PC$  عمود است و با استفاده از آن ابتدا طول  $BO$  خط المرکزین دودایره و بعد طول  $BC$  را معلوم نموده مثلث  $ABC$  را ساخته اند و با تعیین طول  $AB$  مثلث الحسن رسم میشود .

\*\*\*

### راه پنجم - توسط آقایان حسن یوسفی آذری نژاد -

محمد حسین شاکر حسینی دانشجویان دانشکده علوم از رضائیه ( ۴۳۵۲۰ ) عمودی که در نقطه  $A$  بر  $OA$  اخراج شود دایره را در  $K$  قطع می کند ، امتداد  $BA$  دایره را در  $D$  و امتداد  $BO$  ( که بر  $CD$  عمود است ) امتداد  $AK$  را در  $M$  و امتداد  $OA$  امتداد  $CD$  را در  $P$  قطع میکند ، دستگاه  $(A, PDQC)$  توافقی است ( نقطه برخورد  $AK$  با  $CD$  است ) و نتیجه خواهد شد که  $P$  قطب  $AK$  و  $M$  قطب  $CD$  نسبت به دایره  $O$  میباشد ، مماس مرسوم در  $C$  بر دایره ( که نیمساز زاویه خارجی  $ACB$  است ) از  $M$  میگذرد و امتداد  $OH$  را در



قطع میکند  $\overline{OH} \cdot \overline{ON} = R^2$  است و در مثلث متساوی الساقین  $PCN$  با استفاده از اجزاء متساوی نتیجه میشود که

$$\begin{cases} ON - 2OH = OP \\ ON \cdot 2OH = 2R^2 \end{cases}$$

طول های  $ON$  و  $2OH$  که تفاضل و واسطه هندسی آنها معلوم است رسم میشوند و با تعیین طول  $OH$  ضلع  $BC$  بدست خواهد آمد .

### راه ششم - آقای سیاوش فلاح از تهران ( ۵۲۱۱ ) با

استفاده از روابط متری در مثلث نتیجه گرفته اند که بین  $R'$  شعاع دایره محیطی مثلث  $AOB$  و  $OA=d$  و  $R$  شعاع دایره مفروض رابطه زیر برقرار است .

$$2R'^2 - RR' - d^2 = 0$$

و این معادله درجه دوم را از راه ترسیم حل نموده مقدار  $R'$  و در نتیجه مثلث  $AOB$  را مشخص نموده اند .

### راه هفتم - آقای فرهاد نوذری دانشجوی سال اول

دانشکده فنی ( ۵۲۲ ) از  $O$  خطی موازی  $BC$  رسم نموده اند که  $AC$  را در  $M$  قطع میکند و عمود  $MK$  را بر  $OC$  رسم نموده از تشابه مثلث های  $AHC$  و  $AOM$  و مثلث های  $CMK$  و  $COH$  و با استفاده از روابط متری و محاسبات جبری معادله زیر را بدست آورده اند

$$2dOH' + R^2 \cdot OH - R^2 d = 0$$

و این معادله را از طریق هندسی حل کرده طول  $OH$  و در نتیجه مثلث  $ABC$  را مشخص ساخته اند .

### راه هفتم - آقایان بهروز اسلامی دانشجوی دانشکده

فنی ( ۴۲۱۲۴ ) - محمد داوری از اردکان ( ۱۲۱۹ ) با استفاده از روابط مثلثاتی بین زوایا و اضلاع مثلث رابطه (۵) ( مذکور در راه حل اول ) را بدست آورده آنگاه با ترسیمات هندسی طول  $OH$  را بدست آورده اند

\*\*\*

### راه حل هشتم - توسط آقایان مهندس عباس سعیدی

از تهران ( ۴۲۱۵ ) - بهروز قمیصی دانشجوی ریاضی دانشسرای عالی ( ۴۲۱۰ ) - اسرافیل کسرائی از مشهد ( ۵۲۱۱ ) فرخ مجتهدی از تبریز ( ۵۲۱۱ ) - محمد صادق پور از تبریز ( ۵۲۲۰ ) که نوشته آقای مهندس سعیدی در زیر نقل میشود .

(۱) مسأله را حل شده انگاشته و از نظر تقارن مشاهده میشود که خط  $BC$  بر  $SQ$  قطر گذرنده از  $A$  عمود است .

(۲) مماس در

نقطه  $B$  بر دایره

بر  $BO$  نیمساز

داخلی زاویه  $B$

عمود بوده خود

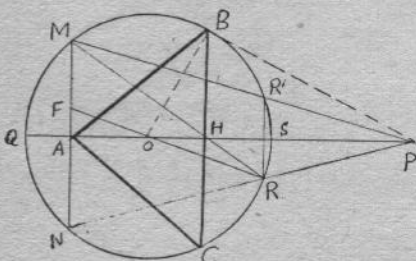
نیمساز خارجی

زاویه  $B$  میباشد

این مماس امتداد

$SQ$  را در  $P$  قطع

میکند .



## راهنمای ریاضیات متوسطه

### محاسبه مساحت مثلث

#### بامعلوم بودن مختصات سه رأس آن

اقتباس از کتاب «مقدمه هندسه تحلیلی» تألیف: افی موف  
توسط: هوشنگ شریفزاده دبیر دبیرستانهای نیریز

فرض میکنیم مختصات سه رأس مثلث عبارت باشد از

$$A \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} \text{ و } B \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} \text{ و } C \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$$

طول اضلاع AB و AC را بترتیب با d و d' و زاویه آنها را با محور Ox بترتیب با α و β نمایش میدهیم در این صورت

$$\angle BAC = |\alpha - \beta|$$

میدانیم که S مساحت مثلث ABC برابر است با

$$S = \frac{1}{2} dd' \sin |\alpha - \beta| \text{ یا}$$

$$S = \frac{1}{2} dd' |\sin(\alpha - \beta)| = \frac{1}{2} dd' |\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta|$$

$$S = \frac{1}{2} |d \sin \alpha \cdot d' \cos \beta - d \cos \alpha \cdot d' \sin \beta|$$

چنانچه X و Y و X' و Y' تصاویر AB و AC بر محورهای Ox و Oy باشد داریم:

$$X = d \cos \alpha \text{ و } Y = d \sin \alpha \text{ و } X' = d' \cos \beta \text{ و } Y' = d' \sin \beta$$

$$S = \frac{1}{2} |X'Y - XY'| \text{ و خواهیم داشت:}$$

$$\begin{vmatrix} X = x_2 - x_1 \\ Y = y_2 - y_1 \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} X' = x_3 - x_1 \\ Y' = y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

و بدست خواهد آمد.

$$S = \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

نتیجه - اگر مختصات سه رأس مثلثی اعداد منطبق باشند مساحت مثلث عدد منطبق است.

$$\text{مثال: } A \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix} \text{ و } B \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \end{vmatrix} \text{ و } C \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} |(\epsilon - 1)(\gamma - 4) - (1 - 1)(2 - 4)|$$

$$S = \frac{1}{2} |-16| = 8$$

۳) نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه تشکیل دستگاه اشعه توافقی میدهند و هر خط که آنها را قطع کند بتوافق تقسیم میشود پس (B.P.OHA) دستگاه اشعه توافقی و (POHA) تقسیم توافقی است.

۴) هرگاه از یک نقطه به چهار نقطه‌ای که تقسیم توافقی تشکیل میدهند وصل شود یک دستگاه اشعه توافقی تشکیل خواهد شد پس (R.P.OHA) دستگاه توافقی است و عمود مرسوم در نقطه A بر OA که با اشعه دستگاه فوق قطع میشود بتوافق تقسیم میشود یعنی (FNMA) تقسیم توافقی است و داریم:

$$\frac{FA}{FM} = -\frac{NA}{NM} = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{FM = -2FA}$$

۵) از P دو قاطع PR'M و PRN که بر دایره O رسم شده است نقطه تلاقی RM و R'N بر CB قطبی P نسبت به دایره واقع است و چون PM و PN نسبت به PA متقارن اند نقطه تلاقی RM و R'N بر PA واقع خواهد شد و نتیجه آنکه RM از H میگذرد.

**طریقه رسم:** ابتدا عمودی در نقطه A بر OA رسم میکنیم تا دایره را در M قطع کند، طول AM را به سه جزء مساوی تقسیم کرده نقطه F را به فاصله  $FA = \frac{1}{3}AM$  بر AM پیدا می‌کنیم، از F به O مرکز دایره وصل کرده و امتداد میدهیم تا در نقطه دیگر R دایره را قطع کند. RM را رسم مینمائیم در نقطه H با SQ قطر گذرنده بر A متلاقی میشود، عمود مرسوم بر SQ در H، دایره را در نقاط C و B قطع میکند، مثلث ABC جواب مسأله است.

## دانش آموز رتبه اول امتحانات نهائی

آقای عبدالمجید چلبی  
دانش آموز ششم طبیعی دبیرستان  
رازی آبادان سال ۱۳۲۳ در  
آبادان بدنیا آمده و تحصیلات  
ابتدائی و متوسطه را بدین  
هیچگونه وقفه‌ای بیایان  
رسانیده است.

آقای چلبی که امروز  
دانشجوی دانشکده پزشکی  
تهران است در امتحانات خرداد  
ماه ۱۳۰۴ با معدل ۹۸٫۰۴



در بین کلیه دانش آموزان رشته طبیعی استان خوزستان رتبه  
اول گردیده است. رئیس دبیرستان رازی آبادان - دکتر نراقی  
فرستنده خبر: مطبوعاتی دهداری نمایندگی یگان در آبادان



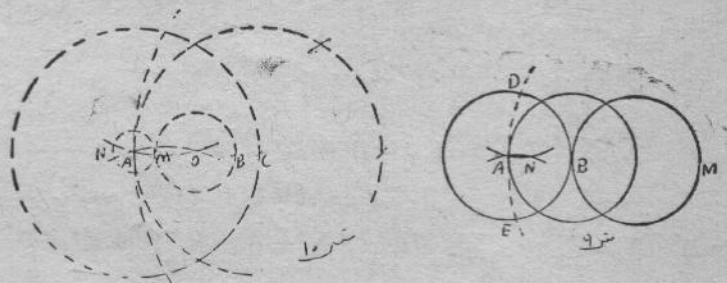
# ترسیمات هندسی

## ترسیمات هندسی فقط با پرگار

تنظیم از: حبیب الله عبداللہی

**مسألة ۹-** خط مفروض (A و B) را به سه یا چند قسمت متساوی تقسیم کنید. ابتدا مانند مسألة (۳) نقطه M را در امتداد AB تعیین میکنیم که  $AM = 3AB$  باشد آنگاه به مرکز M و به شعاع MA دایره ای رسم میکنیم تا دایره به مرکز A و به شعاع AB را در نقاط D و E قطع کند. دایره ای که به مرکز های D و E و با شعاع AB رسم شوند علاوه بر A در نقطه دیگری N متقاطعند و AN برابر با یک سوم AB میباشد (شکل ۹).

اثبات - مانند مسألة (۷) دو مثلث AMD و ADN با نسبت ۳ بر ۱ متشابه اند و در نتیجه  $AB = 3AM$  باروش مشابه، خط (A و B) به چهار، پنج و بالاخره به ۱۱ قسمت متساوی تقسیم خواهد شد.



**مسألة ۱۰-** نقاط A و B و C واقع بر یک استقامت مفروض اند. مطلوب است تعیین نقطه ای بر خط AB بطوریکه فاصله آن تا A برابر باشد با طول BC.

مانند مسألة (۷) نقطه O وسط AC را تعیین میکنیم و مانند مسألة (۳) قرینه B را نسبت به O و قرینه N و قرینه M را نسبت به A بدست میآوریم  $AM = AN = BC$  (شکل ۱۰) اثبات -

$$OA = OC \text{ و } OM = OB \rightarrow AM = BC$$

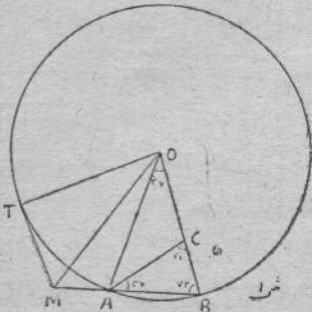
آقای حبیب الله عبداللہی دوست و همکار ما توفیق آنرا بدست آورده اند که با استفاده از بورس دولت فرانسه به آن کشور عزیمت نموده در رشته ریاضیات جدید تحصیلات عالی خود را ادامه دهند. امیدواریم همکاری خود را با مجله یکان قطع نکرده بلکه آن را توسعه دهند.

## رسم n ضلعی منتظم

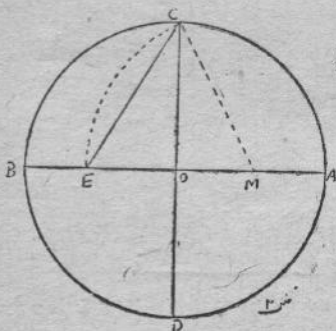
### رسم خط مساوی با طول کمان

تنظیم از: یحیی یحیوی (دبیر دبیرستانهای تهران)

**I - رسم سه ضلعی**، چهار ضلعی و در نتیجه رسم چند ضلعی منتظمی که تعداد اضلاع آن  $2^n \times 3$  یا  $2^n \times 4$  باشد در کتابهای درسی مذکور است



**II - رسم ده ضلعی و پنج ضلعی منتظم** که سابق در کلاس چهارم دبیرستان تدریس میشد بترتیب زیر است: اگر AB ضلع ده ضلعی منتظم ( $C_{10}$ ) باشد زاویه O برابر با  $36^\circ$  و هر یک از زاویه های OBA و



OAB برابر با  $72^\circ$  است، چنانچه AC نیمساز زاویه OAB باشد

$$OC = AC = AB = C_{10}$$

و از تشابه دو مثلث AOB و ABC بدست میآید

$$\frac{AB}{OA} = \frac{BC}{AB} = \frac{C_{10}}{R} = \frac{R - C_{10}}{C_{10}}$$

و نتیجه میشود  $C_{10}^2 = R(R - C_{10})$  یعنی  $C_{10}$  واسطه هندسی بین طولهای R و  $R - C_{10}$  میباشد و از حل معادله بالا نتیجه میشود  $C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$   $BA \cdot C_{10} = \frac{R}{2}$  را از طرف A تا نقطه M به اندازه  $MB = R$  امتداد میدهم و مماس MT را بر دایره رسم مینمائیم، MH واسطه هندسی است بین  $MA = R - C_{10}$  و  $MB = R$  پس  $MH = C_{10}$  و در دایره به مرکز B و با شعاع OB چون وتر OM برابر با زاویه مرکزی  $72^\circ$  است پس  $OM = C_{10}$  و در مثل قائم الزاویه OTM نتیجه میشود:

ضلع پنج ضلعی منتظم وتر مثلث قائم الزاویه ای است که یک

باشد که طول قطعه خط ON برابر با طول کمان OM داریم (شکل ۵)

$$N \begin{vmatrix} \dot{x} = \alpha \\ y = 0 \end{vmatrix} \text{ و } M \begin{vmatrix} x = \sin \alpha \\ y = 1 - \cos \alpha \end{vmatrix}$$

معادله خط MN به صورت

$$y(\sin \alpha - \alpha) = x(1 - \cos \alpha) - \alpha(1 - \cos \alpha)$$

بدست آمده از روی آن مقدار h عرض نقطه B نقطه تلاقی MN با oy به صورت زیر حساب میشود

$$h = \frac{\alpha(1 - \cos \alpha)}{\alpha - \sin \alpha} \quad (۱)$$

در ازا  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  داریم  $h = \frac{\pi}{\pi - 1} \approx ۳.۱۴$  و اگر مقدار تقریبی  $\pi$  برابر با

$۳.۱۴$  اختیار شود  $h = \frac{۱۱}{۴}$  بدست می آید. به آسانی

معلوم میشود که بازه مقادیر مختلف  $\alpha$  اندازه h در حدود ۰.۱۰ تقریب تغییر میکند و عملاً نقطه B ثابت میماند. حال بر oy

نقطه B را با عرض  $\frac{۱۱}{۴}$  انتخاب کرده از B به M يك

نقطه از ربع دایره OA وصل میکنیم تا ox رادر N قطع قطع کفد، ثابت میکنیم طول قطعه خط ON با ۰.۱ تقریب

برابر با طول کمان OM است. از رابطه (۱) نتیجه میشود

$$\alpha = \frac{h \cos \alpha}{h - 1 + \cos \alpha} \quad (۲)$$

اگر  $1 = \overline{ON} = \overline{OM} = \alpha$  و  $h = \frac{۱۱}{۴}$  باشد رابطه (۲)

به صورت زیر در می آید

$$1 = \frac{h \sin \alpha}{h - 1 + \cos \alpha} \text{ یا } 1 = \frac{۱۱ \sin \alpha}{۷ + ۴ \cos \alpha}$$

چون اندازه 1 تحقیقاً برابر اندازه  $\alpha$  نیست اگر خطای

نسبی را در این اندازه گیری برابر D فرض کنیم

$$D = 1 - \alpha \text{ یا } D = \frac{1 \sin \alpha}{h - 1 + \cos \alpha} - \alpha$$

بوده حد اکثر D خطای فوق را با محاسبات زیر بررسی

میکنیم

$$D' = \frac{h \cos \alpha (h - 1 + \cos \alpha) + h \sin^2 \alpha}{(h - 1 + \cos \alpha)^2} - 1$$

از معادله  $D' = 0$  حاصل خواهد شد

$$\cos^2 \alpha - (h^2 - 3h + 2) \cos \alpha + h^2 - 3h + 1 = 0$$

$$\cos \alpha = 1 \text{ و } \cos \alpha = h^2 + 3h + 1$$

و بازه  $h = \frac{۱۱}{۴}$  داریم:

ضلع شعاع دایره محیطی آن ضلع دیگرش ضلع ده ضلعی منتظم محاط در همان دایره باشد (شکل ۱)

طریقه ترسیم: در دایره به شعاع R و به مرکز O دو

قطر عمود بر هم AB و CD را رسم کرده به مرکز M وسط OA و به شعاع MC کمانی رسم میکنیم تا OB رادر E قطع

کند  $OE = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$  بدست آمده و برابر با  $C_1$  و از

آنجا CE برابر با  $C_0$  می باشد (شکل ۲)

III- رسم هفت ضلعی منتظم - به مرکز C واقع

بر دایره به مرکز O و به شعاع CO دایره ای رسم میکنیم تا

دایره O را در A و B قطع کند اگر D وسط AB باشد طول

AD با تقریب ۰.۰۱ شعاع برابر ضلع هفت ضلعی منتظم

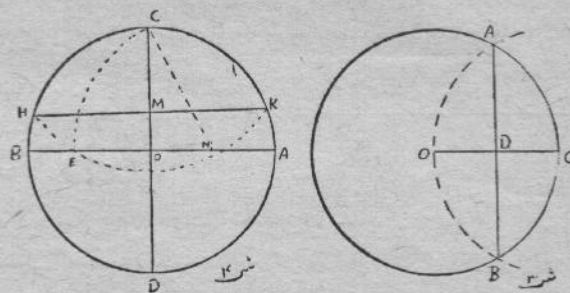
( $C_7$ ) می باشد و عملاً برای تقسیم دایره به هفت جزء مساوی

کفایت میکند. (شکل ۳)

$$C_7 = 2R \sin \frac{\pi}{7} \approx R \times 0.8673 \quad \text{داریم:}$$

$$AD = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660 R$$

$$C_7 - AD = 0.0013 R$$



IV- رسم نه ضلعی منتظم - اگر  $CH = C_0$  و

M تصویر H بر قطر CD باشد (شکل ۴) طول CM با تقریب

۰.۱ شعاع برابر با  $C_9$  است زیرا

$$C_9 = 2R \sin \frac{\pi}{9} \approx 0.684 R$$

$$CM = OC - OM = R - R \cos \frac{2\pi}{9} =$$

$$R(1 - \cos \frac{2\pi}{9}) \approx 0.681 R$$

$$C_9 - CM = 0.003 R$$

V- تبدیل کمان کوچکتر از  $90^\circ$  دایره به خط

مستقیم - فرض میکنیم شعاع دایره  $R = 1$  باشد و  $\alpha$  اندازه

کمان OM بر حسب رادیان بوده و  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  باشد، دستگاه

محورها مختصات xoy را انتخاب میکنیم که ox بر دایره

مماس و oy بر c مرکز دایره بگذرد. اگر N نقطه ای از ox



## VI- مورد استعمال : تقسیم دایره به n جزء متساوی

چون  $OL = OA = \frac{\pi}{2}$  است پس اگر خط BM پاره

خط OL را نصف کند کمان OA را نیز نصف میکند و بطور کلی اگر از نقطه B خطوطی رسم کنیم که OL را به n قسمت متساوی تقسیم کنند کمان OA را نیز به n قسمت (تقریباً متساوی) تقسیم نمایند و واضح است که شعاع CA نیز در این حال به n قسمت متساوی تقسیم میشود ، و از اینجا قاعده تقریبی زیر (که عملاً قابل استفاده است) برای تقسیم محیط دایره به n جزء متساوی بدست میآید :

## VII- قاعده : قطر AA' از دایره را به n قسمت

متساوی تقسیم میکنیم به مرکز A و به شعاع AA' کمانی رسم میکنیم تا عمود منصف A'A را در F و F' قطع کند (بجای نقطه B نقطه F اختیار میشود زیرا

$$CF = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \approx 1.732 \text{ و } CB = \frac{11}{4} = 2.75$$

از F و F' به نقاط تقسیم AA' وصل کرده امتداد میدهیم عملاً محیط دایره به n کمان متساوی تقسیم خواهد شد (شکل ۶) تبصره - با استفاده از مسأله V عملاً میتوان کمانی از

دایره را به اجزاء متساوی تقسیم نموده (تثلیث زاویه) . یا اینکه پاره خطی با طول  $\pi$  رسم نمود (تربیع دایره)

$$\cos \alpha = 1 \text{ و } \alpha = 0$$

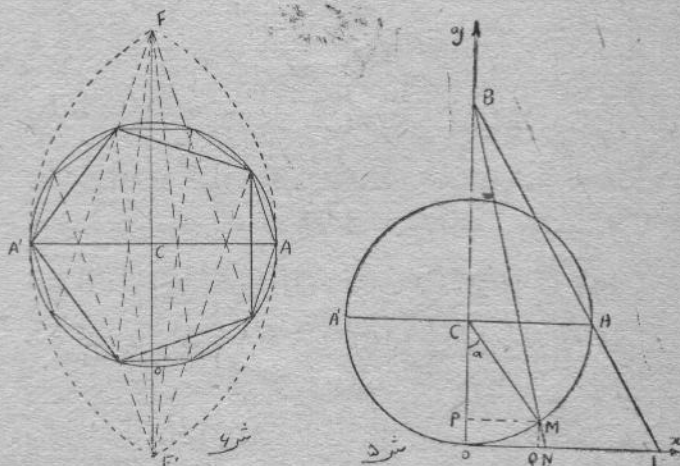
$$\cos \alpha = \frac{0}{16} \text{ و } \alpha \approx 71^\circ 30' \approx 1.247 \text{ رادیان}$$

یعنی اگر نقطه B ثابت بماند تا بسج D بازاء  $\alpha = 0$  می نیم و بازاء  $\alpha = 1.247$  ما کزیم و حداکثر خطا برابر خواهد بود با

$$D = 1 - \alpha \text{ یا } D = 1.247 - 1.261 = 0.014$$

یعنی با تقریب در حدود ۰.۰۱ داریم  $ON = OM$

تبصره - در محاسبات فوق شعاع دایره  $R = 1$  فرض شد و مسلماً هر چه R بزرگتر باشد مقدار خطای حاصل نیز بیشتر خواهد بود و قاعده بالا برای دایره هایی که شعاع آنها خیلی بزرگ نباشد قابل اعمال است .



## بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

سه قوطی است که در هر یک دوسنک مرمر قرار دارد . در یکی هر دوسنک سفید و در دیگری هر دوسنک مشکی و در سومی یکی سفید و دیگری مشکی است . روی در هر قوطی بر چسبی نصب شده است که رنگ سنگهای داخل قوطی را معلوم می کند . مثلاً روی در آن قوطی که داخلش دوسنک مرمر سفید است بر چسب س.س و روی در آن قوطی که در داخلش دوسنک مشکی است بر چسب م.م و بالاخره بر روی در قوطی سوم بر چسب س.م چسبانده شده است . حالا اگر درهای قوطیها را با هم عوض کنیم به طوری که از بر چسب هیچ دری نتوان فهمید که در داخل آن قوطی چه رنگ سنک قرار دارد ، معلوم کنید که چند سنک از قوطیها باید درآوریم و رنگ آن را ببینیم تا رنگ بقیه سنگهای داخل قوطیها را ندیده تشخیص بدهیم ؟

## مسئله گردو

چند نفر بیایه رفته مقداری گردو چیدند و در گوشه اطاق انبار نمودند و شب به استراحت پرداختند . یکی از آنها نصف شب بیدار شد و بتصور آنکه دیگران ممکن است در تقسیم او را مغبون کنند ، گردوهارا بتعداد نفرات تقسیم نمود ، يك گردو زیاد آمد ، آنرا بموجب حکم وجدان که نمیخواست بیشتر از دیگران سهمی برده باشد بخارج پرتاب کرد و سهم خود را پنهان نمود و به بستر خود رفت . بلافاصله فردوم بیدار شد و با همین تصور باقیمانده را بتعداد نفرات تقسیم کرد و يك گردو اضافه آمد ، آنرا بخارج پرتاب کرده سهم خود را پنهان کرد و برخت خواب رفت . نفر سوم ، نفر چهارم ، الی آخر به ترتیب بیدار شدند و این عمل را تکرار کردند تعیین کنید تعداد گردوهارا .

(ایرج ادیبی)

مسئله را برای سه نفر و ۵ نفر حل کنید .

# حل مسائل شماره ۸

حل مسائلی که برای دانش آموزان دوره دوم دبیرستانها در شماره ۸ مطرح شده بود در زیر درج میشود نام فرستندگان پاسخهای حل که این مسائل نامه‌های مربوطه حداکثر تا بیستم آبان واصل شده باشد در صفحات آخر مجله چاپ میشود. حل مسائل متفرقه با ذکر نام حل کنندگان آنها در شماره دهم چاپ خواهد شد.

$$C = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(x-3)} = \frac{2x-3}{x-3}$$

$$A+B+C = \frac{3x+3+1-3x+2x-3}{x-3} = \frac{2x+1}{x-3}$$

## کلاس چهارم ریاضی

حل مسئله ۱۵۰۷ - اثبات اینکه اگر  $a+b+c=0$

باشد داریم

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4) \quad (2)$$

طرفین رابطه (۱) را به توان ۲ میرسانیم و نتیجه

$$a^4+b^4+c^4 = -2(ab+ac+bc) \quad \text{خواهیم گرفت}$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = 4(ab+ac+bc)^2$$

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = 4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+8abc(a+b+c)$$

$$a^4+b^4+c^4 = 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \quad (3)$$

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \quad (4)$$

از مقایسه دو رابطه (۳) و (۴) رابطه (۲) بدست خواهد آمد.

حل مسئله ۱۵۰۸ - برای تجزیه عبارت صورت کسر

به ترتیب زیر عمل میکنیم:

$$x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x)$$

عبارت را نسبت به  $x$  مرتب مینمائیم

$$\begin{aligned} x^3(z-y) - x(z^3-y^3) + yz^3 - zy^3 &= \\ = x^3(z-y) - x(z-y)(z^2+zy+y^2) + & \\ + yz(z-y)(z+y) &= \end{aligned}$$

از عامل  $z-y$  فاکتور گرفته عامل دیگر را نسبت به  $y$  مرتب میکنیم.

$$(z-y)[y^2(z-x) + yz(z-x) - x(z^2-x^2)]$$

در عبارت داخل کروشه از عامل  $z-x$  فاکتور گرفته

## کلاس چهارم طبیعی

حل مسئله ۱۵۰۳ - پس از ضرب دو جمله‌ای  $1+x$

در جمله‌های داخل کروشه و تحویل جمله‌های متشابه حاصل تمام عبارت برابر خواهد شد با

$$x + 2(-1)^{n-1}x^{n+1}$$

حل مسئله ۱۵۰۴ - تبدیل عبارت

$A = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8$  به صورت مجموع دو مربع و تعیین مقادیری از  $x$  و  $y$  که در آن  $A=0$  است.

داریم  $A = (x-2)^2 + (y-2)^2$  و چون مجموع دو مربع همواره مثبت است مگر اینکه هر دو باهم برابر صفر باشند، لذا فقط وقتی  $A=0$  است که داشته باشیم

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (y-2)^2 = 0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

حل مسئله ۱۵۰۵ - ساده نمودن کسر  $\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$

(۱) اگر  $x > 0$  باشد  $|x|=x$  بوده و داریم

$$\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|} = \frac{x^2-x}{x^2+x} = \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = x-1$$

(۲) اگر  $x < 0$  باشد  $|x|=-x$  بوده و

$$\frac{x^2-|x|}{x^2+|x|} = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x(x^2+1)}{x(x-1)} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

حل مسئله ۱۵۰۶ - اولاً دو عبارت داده شده به صورت

زیر تجزیه میشوند

$$(x-3)(x-1) \quad \text{و} \quad (x-3)(2x-3)$$

ثانیاً هریک از کسرها پس از ساده شدن برابر است با

$$A = \frac{2(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2(x+1)}{x-3}$$

$$B = \frac{(1-3x)(x-1)}{(x-1)(3-x)} = \frac{1-3x}{x-3}$$



**حل مسئله ۱۵۱۱-** بفرض اینکه  $m$  عدد صحیح مثبت فرد باشد اثبات اینکه

$$P = (a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$$

بر  $(a+b)(b+c)(c+a)$  بخش پذیر است .  
 درازاء  $a = -b$  و همچنین  $b = -c$  و بالاخره  $c = -a$   
 مقدار  $P$  برابر با صفر میشود پس  $P$  بر هر یک از عاملهای  $a+b$  و  $b+c$  و  $c+a$  بخش پذیر بوده بر حاصل ضرب آنها نیز بخش پذیر است .

**حل مسئله ۱۵۱۲-** بفرض

$$x = a+b+c+d \text{ و } y = a+b-c-d$$

$$z = a-b+c-d \text{ و } t = a-b-c+d$$

$$ab(a^x + b^x) = cd(c^x + d^x)$$

اثبات رابطه  $xy(x^x + y^x) = zt(z^x + t^x)$   
 $xy = [(a+b) + (c+d)][(a+b) - (c+d)]$   
 $= (a+b)^2 - (c+d)^2$   
 $x^x + y^x = [(a+b) + (c+d)]^x + [(a+b) - (c+d)]^x$   
 $= 2[(a+b)^x + (c+d)^x]$   
 و نتیجه خواهد شد  
 $xy(x^x + y^x) = 2[(a+b)^x - (c+d)^x]$   
 و با محاسبات نظیر بدست خواهد آمد که  
 $zt(z^x + t^x) = 2[(a-b)^x - (c-d)^x]$   
 فرض میکنیم  $H = xy(x^x + y^x) - zt(z^x + t^x)$   
 خواهیم داشت :  
 $H = 2[(a+b)^x - (a-b)^x] - 2[(c+d)^x - (c-d)^x]$   
 $= \dots = 2[ab(a^x + b^x) - cd(c^x + d^x)] = 0$   
 و رابطه مطلوب محقق خواهد شد

**حل مسئله ۱۵۱۳-** اولاً تجزیه عبارت داده شده عبارت خواهد شد از

ثانیاً عبارت  $P$  پس از تحویل به یک مخرج به صورت کسری درمیآید که صورت آن عبارت مفروض و مخرج آن تجزیه شده عبارت صورت میباشد در نتیجه  $P = 1$  میباشد

**حل مسئله ۱۵۱۴-** هواپیمائی در امتدادی از سطح زمین برمیخیزد و در هر ثانیه  $\frac{200}{y}$  متر به ارتفاع آن افزوده میشود. اولاً تعیین ارتفاع هواپیما در ۸ ثانیه بعد از پرواز .  
 ثانیاً بفرض اینکه سرعت هواپیما ۱۰۰ متر در ثانیه باشد تعیین زاویه میل امتداد پرواز هواپیما با صفحه افق .

ارتفاع هواپیما بعد از ثانیه هشتم عبارتست از جمله هشتم

یکان

باقی را نسبت به  $z$  مرتب مینمائیم که بالاخره حاصل عبارت فوق عبارت خواهد شد از

$$(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

عبارت مخرج کسر نیز به طریق مشابه تجزیه شده و به صورت زیر نوشته میشود

$$-(x-y)(y-z)(z-x)$$

و در نتیجه حاصل کسر برابر میشود با

$$-(x+y+z)$$

**حل مسئله ۱۵۰۹-** عبارت داده شده به صورت زیر نوشته میشود :

$$y(5x-3)(x-2) = y(5(x+2)(x-1))$$

و خواهیم داشت :

$$(5x-3)(x-2) = 5(x+2)(x-1)$$

$$-18x = -16 \text{ و } x = \frac{8}{9}$$

**حل مسئله ۱۵۱۰-** اولاً خواهیم داشت

$$A - 1 = \frac{3bc - a^2}{bc + 2a^2} - 1 = \frac{2(bc - a^2)}{bc + 2a^2}$$

$$B - 1 = \frac{3(ca - b^2)}{ca + 2b^2} \text{ و } C - 1 = \frac{3(ab - c^2)}{ab + 2c^2}$$

با توجه به رابطه مفروض  $a+b+c=0$  داریم

$$bc + 2a^2 = bc + a^2 + a^2 = bc + a^2 - a(b+c)$$

$$= \dots (a-b)(a-c)$$

$$ca + 2b^2 = (b-a)(b-c) \text{ و } ab + 2c^2 = (c-a)(c-b) \text{ و}$$

$$bc - a^2 = bc + a(b+c) = ab + bc + ca$$

$$ca - b^2 = ab + bc + ca \text{ و } ab - c^2 = ab + bc + ca$$

$$A + B + C - 3 = 2(ab + bc + ca) \left[ \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \right]$$

عبارت داخل کروشه پس از ساده شدن برابر با صفر شده

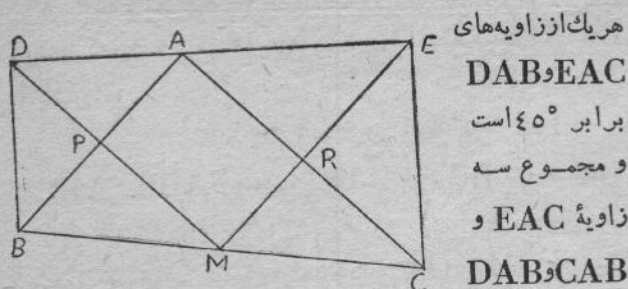
و در نتیجه  $A + B + C = 3$  یا  $A + B + C - 3 = 0$  ثانیاً در نظر میگیریم که

$$3bc - a^2 = 3bc - (b+c)^2 = -(b-c)^2$$

$$3ca - b^2 = -(c-a)^2 \text{ و } 3ab - c^2 = -(a-b)^2$$

$$ABC = -\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} \times \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} \times \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} = -\frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{(b-c)^2(c-a)^2(c-b)^2} = -1$$

حل مسئله ۱۵۱۸ - اثبات اینکه سه نقطه D و A و E بر یک استقامتند.



هر یک از زاویه های  $\angle DAB$  و  $\angle EAC$  برابر  $45^\circ$  است و مجموع سه زاویه  $\angle EAC$  و  $\angle CAB$  و  $\angle DAB$  برابر خواهد شد با  $180^\circ$  یعنی خطوط  $AD$  و  $AE$  بر یک امتداد اند.

(۲) اثبات اینکه چهار ضلعی  $BDEC$  دوزنقه قائم بوده و تعیین مساحت آن: دو خط  $BD$  و  $CE$  که هر دو بر خط  $DAE$  عمود اند متوازیند پس چهار ضلعی مذکور دوزنقه قائم است و داریم

$$BD = DA = AB \frac{\sqrt{2}}{2} = c \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } AE = EC = AC \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \frac{(BD + CE)(DA + AE)}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{c\sqrt{2}}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (b + c)^2$$

(۳) اثبات اینکه چهار ضلعی  $ARMP$  مستطیل است: چون  $AM$  میانه و  $MP$  مثلث قائم الزامی  $ABC$  است لذا  $MA = MB = MC$  و از تساویهای  $MA = MB$  و  $DA = DB$  نتیجه میشود که  $MD$  عمود منصف  $AB$  است و از تساویهای  $MA = MC$  و  $EA = EC$  نیز معلوم میشود که  $ME$  عمود منصف  $AC$  بوده در نتیجه چهار ضلعی فوق الذکر مستطیل میباشد.

حل مسئله ۱۵۱۹ - خط  $xy$  و نقاط  $A$  و  $B$  در خارج آن مفروض اند. نقطه  $C$  را بر  $xy$  چنان بدست آورید که یک از میانه های مثلث  $ABC$  با خط  $xy$  زاویه معلوم  $\alpha$  بسازد. از یک نقطه دلخواه  $O$  واقع بر  $xy$  دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  را چنان رسم میکنیم که هر یک با  $xy$  زاویه  $\alpha$  بسازد و از نقطه  $M$  وسط  $AB$  بموازات  $\Delta$  یا  $\Delta'$  رسم میکنیم تا  $xy$  را در  $C$  و  $C'$  قطع کند مثلث  $ABC$  یا  $ABC'$  جواب مسأله است. چنانچه  $\alpha$  زاویه میانه نظیر رأس  $A$  با  $xy$  باشد ابتدا از  $A$  بموازات  $\Delta$  یا  $\Delta'$  رسم میکنیم که  $xy$  را در  $N$  یا  $N'$  قطع میکنند و از  $B$  بموازات  $xy$  رسم میکنیم که  $AN$  یا  $AN'$  را در  $K$  و  $K'$  قطع مینماید خطی که از  $B$  به وسط  $KN$  یا  $K'N'$  وصل شود  $xy$  را در  $C$  یا  $C'$  قطع مینماید.

یک تصاعد حسابی که جمله اولش صفر و قدر نسبتش  $\frac{200}{7}$  میباشد.

$$l = a + (n - 1)d \text{ و } l = 200m$$

ثانیاً مسافت پیموده شده توسط هواپیمادر ۸ ثانیه برابر است با ۸۰۰ متر و اگر  $\alpha$  زاویه میل امتداد پرواز با افق باشد.

$$\sin \alpha = \frac{200}{800} = \frac{1}{4} \text{ و } \alpha \neq 14^\circ$$

حل مسئله ۱۵۱۵ - تعیین حاصل عبارت زیر

$$P = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

$$P = (1000 + 999)(1000 - 999) + (998 + 997)(998 - 997) + \dots + (2 + 1)(2 - 1)$$

$$P = 1000 + 999 + 998 + \dots + 2 + 1 = 500500$$

حل مسئله ۱۵۱۶ - چون تعداد جمله ها زوج است تصاعد را به صورت زیر فرض میکنیم که در آن  $2r$  قدر نسبت است.

$$a = x - 3r \text{ و } b = x - r \text{ و } c = x + r \text{ و } d = x + 3r$$

$$abcd = (x^2 - 9r^2)(x^2 - r^2) = x^4 - 10r^2x^2 + 9r^4$$

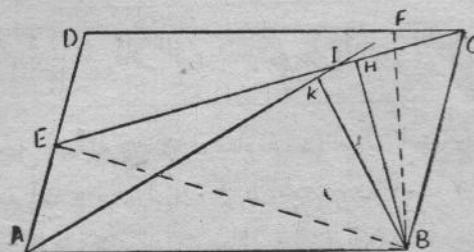
$$(b - a)^4 = (2r)^4 = 16r^4$$

$$abcd + (b - a)^4 = x^4 - 10r^2x^2 + 25r^4 = (x^2 - 5r^2)^2$$

یعنی عبارت مربع کامل است.

حل مسئله ۱۵۱۷ - متوازی الاضلاع  $ABCD$  که در آن زاویه  $A$  حاده بوده و  $AB > AD$  میباشد مفروض است

بر ضلع  $AD$  نقطه ای مانند  $E$  انتخاب میکنیم. تحقیق کنید که بر ضلع  $CD$  نقطه ای مانند  $F$  میتوان تعیین کرد که  $AF = CE$  باشد و اگر  $I$  نقطه تلاقی  $AF$  با  $CE$  باشد ثابت کنید که  $BI$  نیمساز یکی از زاویه های دو خط  $AF$  و  $CE$  میباشد. اولاً چون در مثلث  $ACD$  زاویه  $D$  منفرجه است لذا  $AC > CE > CD$  میباشد و چون  $AD < CD$  است پس  $AC > CE > AD$  بوده نتیجه میشود طول  $AF = CE$  وجود دارد که  $F$  بر  $CD$  واقع باشد.



ثانیاً دو مثلث  $BCE$  و  $ABF$  که هر دو با مثلث  $ABD$  معادلند بایکدیگر معادل بوده ارتفاع های  $BK$  و  $BH$  آن دو بایکدیگر مساویست یعنی نقطه  $B$  از دضلع زاویه  $I$  به یک فاصله بوده به نیمساز این زاویه تعلق دارد.



(۴) برای اینکه  $M$  از دو محور به يك فاصله باشد باید  
 $|a+1| = |3a-1|$  یا  $a+1 = \pm(3a-1)$  و دومقدار  
 $a=0.9$  بدست میآید.

(۵)  $P$  وضع نقطه  $M$  واقع بر محور  $y'y$  میباشد یعنی  
 $a+1=0$  یا  $a=-1$  و مختصات  $P$  عبارت است از  
 $P(0, -1)$  و از روی روابط بین مختصات چهار رأس يك  
 متوازی الاضلاع  $Q(3, 5)$  بدست خواهد آمد.

**حل مسئله ۱۵۲۳ -** اگر  $x$  اندازه زاویه  $B$  بحسب  
 گراد باشد اندازه زاویه  $C$  بحسب درجه برابر خواهد بود با  
 $\frac{18x}{5}$  و برحسب گراد برابر خواهد شد با

$$\frac{18x}{5} \times \frac{200}{180} = 4x$$

و چون اندازه زاویه قائمه  $A$  برابر  $100$  گراد است پس :

$$4x + x = 100 \text{ و } x = 20$$

$$B = 20 \text{ gr} = 18^\circ \text{ و } C = 80 \text{ gr} = 72^\circ$$

**حل مسئله ۱۵۲۴ -** در دایره جهت دار به مبدأ  $A$  نقاط  
 $M$  و  $M_1$  و  $M_2$  بترتیب زیر بدست میآیند.

$$\widehat{AM} = 1045^\circ = 4 \times 360^\circ + 105^\circ = 8\pi + \frac{7\pi}{12}$$

$$\widehat{AM_1} = -1750 \text{ gr} = -4 \times 400 - 150 \text{ gr} =$$

$$= -8\pi - \frac{3\pi}{4} = -10\pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$\widehat{AM_2} = -\frac{649\pi}{12} = -54\pi - \frac{\pi}{12} = -56\pi + \frac{23\pi}{12}$$

تفاضل دو بدوی هر يك از کمانهای با اندازه های

$$\frac{7\pi}{12} \text{ و } \frac{5\pi}{4} \text{ و } \frac{23\pi}{12} \text{ برابر است با } \frac{2\pi}{3} \text{ پس نقاط } M_2 \text{ و } M_1 \text{ و } M$$

سه رأس يك سه ضلعی منتظم میباشند و فرمول کلی اندازه کمان

$$\frac{2K\pi}{3} + \frac{7\pi}{12} \text{ شامل هر سه کمان فوق عبارت است از}$$

### کلاس پنجم ریاضی

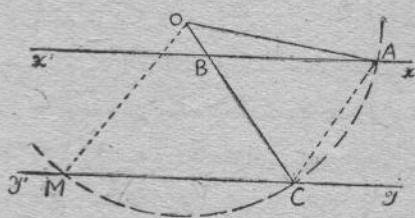
**حل مسئله ۱۵۲۵ -** معادله (۱)  $ax^2 + b|x| + C = 0$

که در آن  $x$  مجهول و  $a \neq 0$  است مفروض است، فرض میکنیم  
 $|x| = y$  در این صورت معادله (۱) با دستگاه زیر هم ارز  
 میباشد.

$$\begin{cases} ay^2 + by + c = 0 \\ |x| = y \end{cases} \quad (2)$$

**حل مسئله ۱۵۲۰ -** دو خط متوازی  $y'y$  و  $x'x$  و نقطه  
 $A$  واقع بر  $x'x$  داده شده است از نقطه مفروض  $O$  خطی مرور  
 دهید که  $x'x$  را در  $B$  و  $y'y$  را در  $C$  قطع کند و  $AB = AC$   
 باشد.

اگر مسأله را حل شده فرض کنیم از تساوی زاویه های  
 $ABC$  و  $ACB$  و همچنین  $ABC$  و  $BCy'$  نتیجه میشود که  
 $AC$  نیمساز زاویه  $ACy'$  میباشد و چون  $CM = AC$  را بر  
 $Cy'$  جدا نمائیم نتیجه خواهد شد که  $OM = OA$ . بنابراین  
 برای رسم خط مطلوب کافی است دایره بمرکز  $O$  و به شعاع  
 $OA$  را رسم کنیم



تا  $y'y$  را در  $M$   
 قطع نماید. نیمساز  
 زاویه  $MOA$   
 جواب مسأله  
 است. مسأله وقتی

جواب خواهد داشت که دایره مزبور خط  $y'y$  را قطع نماید.

### کلاس های پنجم طبیعی و ریاضی

**حل مسئله ۱۵۲۱ -** بنا به فرض داریم  $x_A = -1$

و  $x_B = 4$  و خواهیم داشت  $x_{A'} = 1$  و  $x_{B'} = -4$

$$x_P = \frac{x_A + x_{B'}}{2} = -\frac{5}{2} \text{ و } x_{P'} = \frac{x_{A'} + x_B}{2} = \frac{5}{2}$$

$$PP' = x_{P'} - x_P = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$$

**حل مسئله ۱۵۲۲ -** سه نقطه  $A(0, 1)$  و  $B(3, 0)$

و  $M(a+1, 3a-1)$  مفروض است.

(۱) با استفاده از فرمول فاصله دو نقطه بدست خواهد آمد :

$$AM = BM = \sqrt{1 \cdot a^2 - 10a + 5}$$

(۲) مختصات نقطه  $P$  وسط  $AB$  بترتیب  $\frac{3}{2}$  و  $\frac{1}{2}$

است و از یکی از معادله های  $a+1 = \frac{3}{2}$  یا  $3a-1 = \frac{1}{2}$

برای  $a$  مقدار  $a = \frac{1}{2}$  بدست میآید.

(۳) برای اینکه مثلث  $AMB$  قائم الزاویه باشد باید

داشته باشیم  $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2$  و بعد از محاسبه های

لازم مقادیر  $a = 0.9$  بدست میآید.

ریشه‌های معادله (۲) عبارت اند از ریشه های دستگاه زیر

$$\begin{cases} (x-a)(x-b) = (x - \frac{a+b+1}{2})^2 & (3) \\ x - \frac{a+b+1}{2} > 0 & (4) \end{cases}$$

از معادله (۳) پس از ساده کردن بدست خواهد آمد

$$x = \frac{(a+b+1)^2 - 4ab}{4} \quad (5)$$

و نامساوی (۴) با توجه به (۵) پس از ساده شدن چنین مشود :

$$(a+b+1)^2 - 2(a+b+1) - 4ab \geq 0$$

که باز هم ساده میشود :

$$(a+b)^2 - 1 - 4ab = (a-b)^2 - 1 \geq 0$$

و نتیجه خواهد شد

$$|a-b| \geq 1 \quad (6)$$

اگر شرط (۶) برقرار باشد جواب (۵) از  $x$  برای

معادله (۲) قابل قبول بوده اما برای معادله (۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sqrt{x-a} &= \sqrt{\frac{(a+b+1)^2 - 4ab}{4} - a} = \\ &= \sqrt{\frac{(a-b-1)^2}{4}} = \frac{|a-b-1|}{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{x-b} = \dots = \sqrt{\frac{(a-b+1)^2}{4}} = \frac{|a-b+1|}{2}$$

و طرف اول معادله (۱) عبارت میشود از

$$\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b} = \frac{|a-b-1| - |a-b+1|}{2}$$

بدر نظر گرفتن رابطه (۶) دو حالت در نظر میگیریم

حالت اول -  $a-b \geq 1$  باشد در این صورت

$$\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b} = \frac{(a-b-1) - (a-b+1)}{2} = -1$$

و مقدار  $x$  از رابطه (۵) ریشه معادله (۱) نخواهد بود .

حالت دوم -  $a-b \leq -1$  باشد در این صورت

$$\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b} = \frac{-(a-b-1) + (a-b+1)}{2} = 1$$

و مقدار  $x$  از رابطه (۵) برای (۱) ریشه قابل قبول میباشد .

خلاصه با توجه به اینکه در حالت  $-1 < a-b < 1$

شرط (۶) برقرار نیست بحث چنین میشود .

۱- اگر  $a-b \leq -1$  باشد معادله دارای یک ریشه

(۵) میباشد .

(۲) اگر  $a-b > -1$  باشد معادله ریشه نخواهد

داشت :

حل مسئله ۱۵۲۷ - حل و بحث نامعادله

$$mx^2 + (m-1)x + m-1 < 0$$

از دستگاه (۲) معلوم میشود که فقط ریشه‌های مثبت معادله

نسبت به  $y$  برای معادله نسبت به  $x$  قابل قبول میباشد (اگر

$y=0$  باشد  $x=0$  خواهد بود)

(۱) اگر  $ac < 0$  باشد از معادله (۲) دو مقدار مختلف

العامت برای  $y$  بدست میآید که درازاء مقدار مثبت آن که قابل

قبول است دو مقدار قرینه برای  $x$  حاصل میشود .

(۲) اگر  $ac > 0$  و  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  باشد اولاً

ضریب  $b$  صفر نمیتواند باشد زیرا لازم میآید که  $ac < 0$

باشد و معادله (۲) دارای دو جواب متحدالعلامت  $y'$  و  $y''$

میشود . چنانچه  $-\frac{b}{a} < 0$  باشد مقادیر  $y'$  و  $y''$  هر دو منفی

بوده و معادله (۱) دارای ریشه قابل قبول نمیشود . چنانچه

$-\frac{b}{a} > 0$  باشد مقادیر  $y'$  و  $y''$  هر دو مثبت بوده و معادله

(۱) دارای چهار ریشه  $x_1 = y'$  و  $x_2 = -y'$  و  $x_3 = y''$  و  $x_4 = -y''$

و  $x_5 = -y''$  خواهد بود .

(۳) در حالت  $c=0$  معادله (۲) دارای ریشه‌های  $y'=0$

و  $y'' = -\frac{b}{a}$  است که اگر  $-\frac{b}{a} < 0$  باشد معادله (۱)

فقط دارای ریشه  $x=0$  است و اگر  $-\frac{b}{a} > 0$  باشد معادله

(۱) دارای سه ریشه  $x_1 = 0$  و  $x_2 = y''$  و  $x_3 = -y''$  خواهد

بود و اگر  $-\frac{b}{a} = 0$  باشد معادله (۱) فقط دارای ریشه  $x=0$

میشود (میتوان گفت  $x=0$  ریشه مرتبه سوم معادله میباشد)

(۴) در حالت  $\Delta = 0$  معادله (۲) دارای ریشه مضاعف  $y = -\frac{b}{2a}$

است . چنانچه  $-\frac{b}{2a} < 0$  باشد معادله (۱) دارای ریشه نیست

و چنانچه  $-\frac{b}{2a} > 0$  باشد معادله (۱) دارای ریشه های

$x = \pm \frac{-b}{2a}$  است و اگر  $b=0$  باشد معادله (۱) دارای

ریشه مضاعف  $x=0$  میباشد .

حل مسئله ۱۵۲۶ - حل و بحث معادله زیر :

$$\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b} = 1 \quad (1)$$

طرفین را بتوان ۲ میرسانیم

$$x-a + x-b - 2\sqrt{(x-a)(x-b)} = 1$$

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} = x - \frac{a+b+1}{2} \quad (2)$$



$$\begin{cases} x = \pm \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \pm \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = \pm \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \pm \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

حل مسئله ۱۵۲۹ - حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} xy + xy^2 + xy^3 = 28 \\ x + xy^4 + xy^5 = 98 \end{cases}$$

طرفین معادله دوم را نظیر به نظیر بر طرفین معادله اول تقسیم میکنیم پس از حذف  $x \neq 0$  از صورت و مخرج کسر حاصل، خواهیم داشت:

$$\frac{y^5 + y^4 + 1}{y^3 + y^2 + y} = \frac{7}{2}$$

عبارت مخرج بصورت  $y(y^2 + y + 1)$  تجزیه میشود و عبارت صورت کسر بر  $y^2 + y + 1 \neq 0$  قابل قسمت است که پس از تقسیم و ساده کردن کسر خواهیم داشت:

$$\frac{y^3 - y + 1}{y} = \frac{7}{2} \quad \text{یا} \quad 2y^3 - 9y + 2 = 0$$

$$2y^3 - 8y - y + 2 = 0 \quad \text{یا} \quad 2y(y^2 - 4) - (y - 2) = 0$$

$$(y - 2)(2y^2 + 4y - 1) = 0 \quad y = 2 \quad \text{و} \quad \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

در ازاء این مقادیر  $y$ ، از روی یکی از معادله‌های دستگاه مقادیر نظیر  $x$  بدست می‌آید.

حل مسئله ۱۵۳۰ - حل دستگاه

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{x + y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 13\sqrt{2} \end{cases}$$

از تقسیم طرفین دو معادله بر یکدیگر و حذف عامل  $x - y \neq 0$  نتیجه میشود  $x + y = 26$  که چون در معادله دوم قرار دهیم و ساده نمائیم  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2}$  و از روی آن  $\sqrt{xy} = 12$  یا  $xy = 144$  بدست خواهد آمد و با توجه به اینکه  $x > y > 0$  است خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ xy = 144 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 18 \\ y = 8 \end{cases}$$

حل مسئله ۱۵۳۱ - حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} x^2 = 7x + 2y \\ y^2 = 3x + 7y \end{cases}$$

$$a = m \quad \Delta = -(3m + 1)(m - 1) \quad \text{و}$$

با توجه به علامت سه جمله‌ای درجه دوم بحث در نامعادله در جدول زیر خلاصه میشود.

| m              | $\Delta$ | a | جواب                    |
|----------------|----------|---|-------------------------|
| $-\infty$      | -        | - | $\forall x$             |
| $-\frac{1}{3}$ | +        | - | $(x \neq -2) \forall x$ |
| 0              | +        | - | $x < x''$ و $x > x'$    |
| 1              | -        | - | $x > -1$                |
| $+\infty$      | +        | + | $x'' < x < x'$          |
|                | -        | + | ممکن نیست               |
|                | +        | + | نامعادله ممکن نیست      |

حل مسئله ۱۵۳۸ - حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} 2x^3 - 3x = 2y^3 - 3y \\ x^4 - 2x^2 = y^4 - 2y^2 \\ x \neq y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^3 < y^3) = 3(x - y) \\ x^4 - y^4 = 2(x^2 - y^2) \end{cases}$$

با تجزیه عبارات طرفین تساوی‌ها و حذف عامل

$x - y \neq 0$  داریم:

$$\begin{cases} 2(x^2 + xy + y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

و این دستگاه به دو دستگاه زیر تجزیه میشود:

$$\begin{cases} 2(x^2 + xy + y^2) = 3 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 2(x^2 + xy + y^2) = 3 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

با حل هر یک از دو دستگاه فوق که نسبت  $y$  و  $x$  متقارن

هستند جوابهای زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

و  $c = \cot u$  محاسبه مقادیر  $y = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  از روی مقادیر  $u$ .

پس از محاسبات و ساده کردن عبارت خواهیم داشت .

$$y = \sqrt{\frac{25}{\cos^2 u}} = \frac{5}{|\cos u|}$$

$$y = \frac{5}{\cos u} \quad \text{اگر } 0 \leq u < \frac{\pi}{2} \text{ باشد داریم}$$

$$y = -\frac{5}{\cos u} \quad \text{اگر } \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2} \text{ باشد داریم}$$

$$y = \frac{5}{\cos u} \quad \text{اگر } \frac{3\pi}{2} < u \leq 2\pi \text{ باشد}$$

حل مسئله ۱۵۳۴ - بفرض

$$z = \tan b \text{ و } y = \frac{\tan a}{\cos b} \text{ و } x = \frac{1}{\cos a \cos b}$$

مقدار عبارت  $P = x^2 - y^2 - z^2$  بعد از محاسبات لازم و اختصار برابر با  $P = 1$  بدست خواهد آمد .

حل مسئله ۱۵۳۵ - بفرض

$$y = a \tan u + \frac{b}{\cos u} \text{ و } x = \frac{a}{\cos u} + b \tan u$$

برای تعیین رابطه مستقل از  $u$  بین  $x$  و  $y$  عبارت  $x^2 - y^2$  را حساب مینمائیم که بعد از محاسبات لازم و با توجه به رابطه

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \text{ خواهیم داشت } \frac{1}{\cos^2 u} - \tan^2 u = 1$$

حل مسئله ۱۵۳۶ - مثلث  $ABC$  و نقطه  $S$  واقع در

خارج صفحه آن مفروض است بر خطوط  $SA$  و  $SB$  و  $SC$  نقاط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  را چنان تعیین میکنیم که

$$\frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = \frac{1}{3} \text{ و } \frac{\overrightarrow{SB'}}{\overrightarrow{SB}} = \frac{\overrightarrow{SC'}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{1}{2}$$

(۱) تعیین  $\Delta$  فصل مشترك صفحات  $ABC$  و  $A'B'C'$  :

خطوط  $AB$  و  $A'B'$  موازی نیستند و در نقطه ای مانند  $\beta$  یکدیگر را قطع می کنند . خطوط  $AC$  و  $A'C'$  نیز در نقطه ای مانند  $\gamma$  متلاقیند و خط  $\Delta$  که بر  $\beta$  و  $\gamma$  میگذرد فصل مشترك مطلوب میباشد .

$$\text{تعیین نسبت های } \frac{\overrightarrow{\beta\gamma}}{\overrightarrow{BC}} \text{ و } \frac{\overrightarrow{\gamma C}}{\overrightarrow{\gamma A}} \text{ و } \frac{\overrightarrow{\beta B}}{\overrightarrow{\beta A}} \text{ : اگر } B'' \text{ و } C''$$

بترتیب قرینه های نقطه  $A'$  نسبت به نقاط  $B'$  و  $C'$  باشند

$$\overrightarrow{BB''} = \overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{A'S} = -\overrightarrow{SA'} :$$

طرفین دو معادله دستگاه را نظیر به نظیر يك دفعه با هم جمع و يك دفعه از هم كم مینمائیم :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10(x+y) \\ x^2 - y^2 = \xi(x-y) \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 10) = 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 - \xi) = 0 \end{cases}$$

و چهار دستگاه زیر حاصل خواهد شد

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 10 \\ x^2 + xy + y^2 = \xi \end{cases}$$

که از حل هر يك از دستگاهها مقادیر زیر برای  $y$  و  $x$

بدست خواهد آمد .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=\pm\sqrt{10} \\ y=\pm\sqrt{10} \end{cases} \\ & \begin{cases} x=\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{12}) \\ y=\pm\frac{1}{2}(1-\sqrt{12}) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=\pm\frac{1}{2}(1-\sqrt{12}) \\ y=\pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{12}) \end{cases} \end{aligned}$$

حل مسئله ۱۵۳۲ - حل دستگاه

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} + \sqrt{(x-y+a)^2} = 2\sqrt{\xi xy} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{a} = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم حاصل میشود  $ay - ax + xy = 0$  و

در نتیجه خواهیم داشت  $(x-y+a)^2 = x^2 + y^2 + a^2$  و دستگاه بصورت زیر در می آید .

$$\begin{cases} 2\sqrt{(x-y+a)^2} = 2\sqrt{\xi xy} \\ a(x-y) - xy = 0 \end{cases}$$

و بالاخره بدست خواهد آمد :

$$\begin{cases} x-y=a \\ xx=a^2 \end{cases}$$

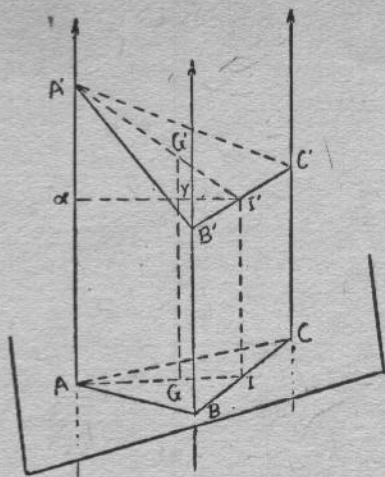
و از حل این دستگاه خواهیم داشت

$$x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \text{ و } y = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

حل مسئله ۱۵۳۳ - بفرض

$$b = 3 \sin u - \xi \cos u \text{ و } a = 3 \cos u + \xi \sin u \text{ و } 0 < u < 2\pi$$





حل مسأله ۱۵۳۷ - اولاً اثبات اینکه  $G'$  نقطه ثابتی

است اگر  $I$  و  $I'$  به ترتیب اوساط  $BC$  و  $B'C'$  و  $G$  و  $G'$  مرکز ثقل مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  مرکز ثقل مثلث  $A'B'C'$  باشد داریم

$$\frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GI}} = -2 \text{ و } \frac{\overrightarrow{G'A'}}{\overrightarrow{G'I'}} = -2 \rightarrow \frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{GI}} = \frac{\overrightarrow{G'A'}}{\overrightarrow{G'I'}}$$

و از این رابطه معلوم میشود که  $GG'$  با هر یک از سه محور مفروض موازی است. اگر از  $I'$  خطی موازی با  $AI$  رسم شود  $GG'$  رادر  $\gamma$  و  $AA'$  رادر  $\alpha$  قطع میکند. از تشابه مثلث های  $I'A'\alpha$  و  $I'G'\gamma$  نتیجه میشود

$$\frac{\overrightarrow{\gamma G'}}{\overrightarrow{\alpha A'}} = \frac{\overrightarrow{I' \gamma}}{\overrightarrow{I' \alpha}} = \frac{\overrightarrow{IG}}{\overrightarrow{IA}} = \frac{1}{3} \rightarrow \overrightarrow{\gamma G'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{\alpha A'}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{G\gamma} + \overrightarrow{\gamma G'} = \overrightarrow{A\alpha} + \frac{1}{3} \overrightarrow{\alpha A'} = \\ &= \frac{2\overrightarrow{A\alpha} + \overrightarrow{\alpha A'}}{3} = \frac{\overrightarrow{A\alpha} + \overrightarrow{\alpha A'} + \overrightarrow{A\alpha}}{3} = \\ &= \frac{\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{A\alpha}}{3} \end{aligned}$$

در دوزنقه  $BCC'B'$  خط  $II'$  اوساط دوساق را بهم وصل کرده است و داریم:

$$2\overrightarrow{A\alpha} = 2\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$$

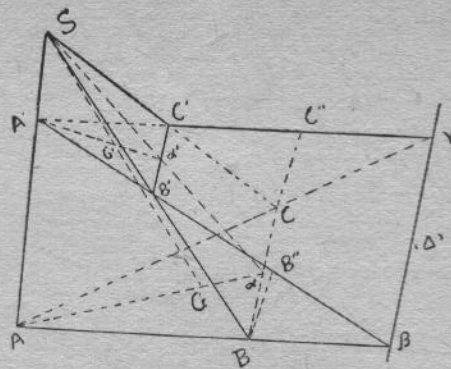
و نتیجه میشود

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{K}$$

یعنی  $G'$  نقطه ایست ثابت

برعکس فرض میکنیم  $A''$  و  $B''$  و  $C''$  نقاط تلاقی محورهای مفروض با صفحه دلخواهی باشد که بر نقطه  $G'$  گذشته است اگر  $I''$  وسط  $B''C''$  باشد خط  $II''$  با محورهای مفروض و با  $GG'$  موازی بوده با استفاده از قضیه تالس معلوم خواهد شد که  $G'$

یکان



$$\frac{\overrightarrow{\beta B}}{\overrightarrow{\beta A}} = \frac{\overrightarrow{\gamma C}}{\overrightarrow{\gamma A}} = \frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{AA'}} = \frac{1}{2}$$

و از روی آن نتیجه خواهد شد که  $\overrightarrow{\beta \gamma} = 2\overrightarrow{BC}$  و در نتیجه  $\beta \gamma$  با  $BC$  موازی میباشد.

(۲) تعیین نسبت بین  $\overrightarrow{SG}$  و  $\overrightarrow{SG'}$ : اگر  $\alpha$  وسط  $BC$  باشد خط  $S\alpha$  خط  $B'C'$  رادر  $\alpha'$  قطع میکند و خط  $A'\alpha'$  فصل مشترک دو صفحه  $A'B'C'$  و  $SA\alpha$  است.

خط  $SG$  در صفحه  $SA\alpha$  واقع بوده و نقطه تلاقیش با صفحه  $A'B'C'$  همان نقطه  $G'$  نقطه تلاقی  $SG$  و  $A'\alpha'$  میباشد. داریم:

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{A\alpha}} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AS}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{A\alpha}} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AS}} = \frac{2}{3}$$

و نتیجه میشود که  $A'G$  با  $S\alpha$  موازی است و همچنین

$$\frac{\overrightarrow{A'G}}{\overrightarrow{S\alpha}} = \frac{2}{3} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\frac{\overrightarrow{GA'}}{\overrightarrow{S\alpha'}} = \frac{\overrightarrow{GA'}}{\overrightarrow{S\alpha}} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{\overrightarrow{G'G}}{\overrightarrow{G'S}} = -\frac{4}{3} \text{ یا } \frac{\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SG'}}{\overrightarrow{SG'}} = \frac{4}{3}$$

$$3\overrightarrow{SG} = 7\overrightarrow{SG'} \text{ یا } \frac{\overrightarrow{SG'}}{\overrightarrow{SG}} = \frac{3}{7}$$

$$F(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} =$$

$$= \frac{(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x-b)(x-c)} + \frac{1}{(x-c)(x-a)} +$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{(x-a) + (x-b) + (x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)} =$$

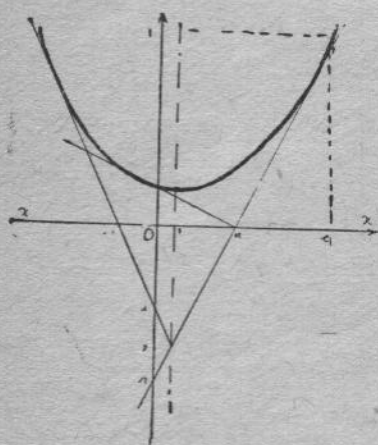
$$= \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f(x)}$$

حل مسأله ۱۵۴۰ - اولاً رسم جدول و منحنی (C) نمایش

تابع  $y = \frac{1}{8}(x^2 - 2x - 17)$  به شرح زیر است -

$$y' = \frac{1}{4}(2x - 2)$$

|      |           |                         |              |                    |
|------|-----------|-------------------------|--------------|--------------------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$                     | $1$          | $+\infty$          |
| $y'$ |           | $-$                     | $0$          | $+$                |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow \frac{17}{8}$ | $\searrow 2$ | $\nearrow +\infty$ |



(۲) تعیین معادله

مماس بر منحنی در

نقطه از آن بطول ۹ -

مشتق تابع در ازای

$x = 9$  برابر با ۲

میشود که برابر است با

ضریب زاویه مماس و

در ازاء  $x = 9$  داریم

$y = 10$  و معادله مماس

عبارت میشود از

$$y - 10 = 2(x - 9) \text{ یا } y = 2x - 8$$

(۳) نقطه تلاقی خط  $y = 2x - 8$  با محور  $x$  عبارت

است از  $(0, y)$  و  $P(x = 4, y = 0)$  و با خط  $x = 1$  عبارت است از

$M(x = 1, y = -6)$  معادله کلی خطوطی که بر  $P$  میگذرند

به صورت  $y = mx - 4m$  و معادله کلی خطوطی که بر  $M$

میگذرند  $y = mx - m - 6$  میباشد.

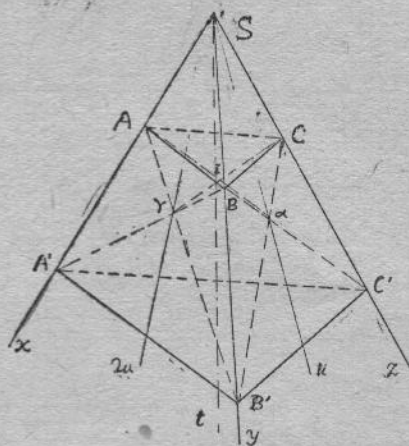
$$\frac{1}{8}(x^2 - 2x + 17) = mx - 4m$$

مرکز ثقل مثلث  $A''B''C''$  میباشد و با ترتیب عکس آنچه که قبلاً ثابت شد بدست خواهد آمد که

$$AA'' + BB'' + CC'' = K$$

حل مسأله ۱۵۳۸ - اولاً تعیین فصل مشترکهای دوبدوی

صفحات و نقطه مشترک هر سه صفحه؛ اگر نقطه تقاطع  $BC'$  و  $CB'$   $\alpha$  باشد  $\alpha$  به هر يك از دو صفحه  $ABC'$  و  $ACB'$  تعلق



دارد بنابراین

$A\alpha$  فصل مشترک

این دو صفحه

میباشد و چنانچه

$\gamma$  نقطه تلاقی

خطوط  $AB'$  و

$BA'$  و بالاخره

$\beta$  نقطه تلاقی

خطوط  $AC'$  و

$CA'$  باشد  $C\gamma$

فصل مشترک دو صفحه  $ABC'$  و  $BCA'$  و  $B\beta$  فصل مشترک دو صفحه  $BCA'$  و  $ABC'$  میباشد.  $A\alpha$  و  $C\gamma$  در يك نقطه  $I$  متقاطع اند که  $I$  به هر سه صفحه تعلق دارد و تنها نقطه مشترک هر سه صفحه میباشد.

ثانیاً تعیین مکان  $I$  - در ذوزنقه  $BCC'B'$  نقطه تلاقی

دوقطر یعنی  $\alpha$  با  $S$  نقطه تلاقی دوساق و اواسط دوقاعده  $BC$  و

$B'C'$  چهار نقطه واقع بر يك استقامت میباشد بنابراین مکان  $\alpha$

وقتی که  $B'C'$  بموازات  $BC$  حرکت کند خط  $Su$  میانه مثلث

$SBC$  میباشد و نقطه  $I$  در صفحه  $xSu$  قرار خواهد داشت.

مکان  $\gamma$  خط  $Sw$  میانه مثلث  $SAB$  است و نقطه  $I$  در صفحه

$ZSw$  واقع است و بنابر این  $I$  بر  $St$  فصل مشترک صفحات

$xSu$  و  $ZSw$  واقع میباشد و  $St$  صفحه  $ABC$  را در  $G$

مرکز ثقل مثلث  $ABC$  قطع می کند بنابراین مکان  $I$  خط  $St$

که بر  $G$  میگذرد میباشد.

## کلاسهای ششم طبیعی و ریاضی

حل مسأله ۱۵۳۹ -

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) +$$

$$(x-a)(x-b)$$

$$f''(x) = (x-c) + (x-b) + (x-a) + (x-c) +$$

$$(x-a) + (x-b) = 2[(x-a) + (x-b) + (x-c)]$$



نظیر يك نقطه M از منحنی

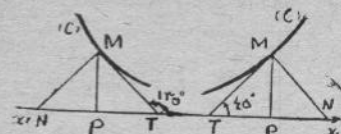
(c) متساوی باشند مثلث

NMT قائم الزاویه متساوی-

الساقین بوده و زاویه مماس

با محور  $ox$  برابر  $\pm 45^\circ$

میباشد.



برای اینکه بر منحنی نمایش تابع  $y = ax^2 + bx + c$

نقطه ای بیاییم که نظیر آن تحت مماس با تحت قائم مساوی باشد

کافی است نقطه ای بر منحنی تعیین کنیم که مماس در آن نقطه با

منحنی با محور  $ox$  زاویه  $\pm 45^\circ$  بسازد. معادله کلی خطوطی

که با محور  $ox$  زاویه  $45^\circ$  میسازند عبارتست از  $y = \pm x + h$

یا  $ax^2 + bx + c = \pm x + h$

$ax^2 + (b \pm 1)x + c - h = 0$

$\Delta = (b \pm 1)^2 - 4ac + 4ah = 0$

و چون  $a \neq 0$  فرض شود برای  $h$  همواره دو جواب

بدمت خواهد آمد. طولهای نقاط یعنی نقاطی که در آنها تحت

مماس با تحت قائم مساویست عبارتند از

$$x = -\frac{b-1}{2a} \text{ و } x = -\frac{b+1}{2a} \text{ و برای هر دو}$$

$$y = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}$$

**حل مسئله ۱۵۴۳-** نظیر مسأله قبل عمل میشود و مختصات

نقاط مطلوب عبارتست از:

$$(x = \frac{p}{y} \text{ و } y = p) \text{ و } (x = \frac{p}{y} \text{ و } y = -p)$$

**حل مسئله ۱۵۴۴-** منحنی (c) با معادله زیر

معروض است.

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$$

(۱) تعیین معادله محور تقارن منحنی (c): اگر خط

$y = ax + b$  منحنی (c) را در دو نقطه M و N قطع کند

طولهای M و N ریشه های معادله زیر میباشد.

$$x^2 + (ax + b)^2 - 2x(ax + b) - 2x - 2(ax + b) = 0$$

$$(a^2 - 2a + 1)x^2 - 2(-ab + a + 1)x + b^2 - 2b = 0$$

و اگر I وسط M و N باشد داریم:

$$x_I = \frac{-ab + a + b + 1}{a^2 - 2a + 1}$$

و از معادله  $y = ax + b$  عرض I پس از ساده شدن

یکان

$$x^2 - 2(1 + \epsilon m)x + 17 + 32m = 0$$

$$\Delta' = (1 + \epsilon m)^2 - 17 - 32m = 16m^2 - 24m -$$

$$-16 = 0 \text{ و } m = 2 - \frac{1}{2}$$

و معادلات  $PT'$  و  $PT$  خطوط مماس مرسوم از P بر (C)

عبارت است از:

$$y = 2x - 8 \text{ و } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{1}{8}(x^2 - 2x + 17) = mx - m - 6$$

$$x^2 - 2(1 + \epsilon m)x + 60 + 8m = 0$$

$$\Delta' = (1 + \epsilon m)^2 - 60 - 8m = 16m^2 - 64 = 0 \text{ و}$$

$$m = \pm 2$$

و معادلات مماسهای MS و MS' عبارت میشود از

$$y = 2x - 8 \text{ و } y = -2x - 4$$

چون حاصل ضرب ضریب زاویه های خطوط  $PT'$  و  $PT$

برابر با -۱ است پس زاویه  $TPT'$  قائمه است و چون M

بر محور تقارن منحنی (C) یعنی خط  $x = 1$  واقع است و دو

خط MS و MS' با محور تقارن زاویه های مساوی میسازند

نسبت به محور تقارن منحنی متقارن بوده در نتیجه:

$$MS = MS'$$

**حل مسئله ۱۵۴۱-** حل معادله مثلثاتی

$$2 \sin^3 x = 1 + \sin^3 x$$

صفر و  $2\pi$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 + \sin^2 x$$

$$\sin^3 x = -\cos^2 x = \sin(-\frac{\pi}{2} + 2x)$$

$$2x - \frac{\pi}{2} + 2x = 2k\pi + \pi \text{ و } x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}$$

$$2x + \frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi \text{ و } x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

جوابهای واقع در فاصله صفر و  $2\pi$  عبارتند از

$$x_1 = \frac{3\pi}{10} \text{ و } x_2 = \frac{7\pi}{10} \text{ و } x_3 = \frac{11\pi}{10} \text{ و } x_4 = \frac{15\pi}{10} =$$

$$= \frac{3\pi}{2} \text{ و } x_5 = \frac{19\pi}{10}$$

کلاس ششم ریاضی

**حل مسئله ۱۵۴۲-** وقتی که تحت مماس و تحت قائم

چنین بدست میآید :

$$y_I = \frac{a^2 - ab + a + b}{a^2 - 2a + 1}$$

با حذف  $b$  بین مقادیر  $y$  و  $x$  نقطه  $I$  معادله  $I$  مکان

شامل پارامتر  $a$  عبارت میشود از  $y = x + \frac{a+1}{a-1}$  که خطی

است مستقیم و این خط وقتی برخط  $y = ax + b$  عمود است که  $a = -1$  باشد که در این صورت مکان  $I$  بصورت  $y = x$  در میآید یعنی خط  $y = x$  محور تقارن منحنی (c) میباشد (برای توضیحات بیشتر به شماره اول یکان مراجعه شود)

۲- چنانچه مانند مسأله های ۱۵۴۲ و ۱۵۴۳ عمل شود معلوم خواهد شد که بر منحنی (c) هیچ نقطه ای نمیتوان یافت که در آن تحت مماس با تحت قائم مساوی باشد.

۳- نقطه  $P(x = \alpha, y = \beta)$  را در نظر میگیریم، برای تعیین معادله خطوط مماسی که از این نقطه بر (c) رسم میشود معادله کلی خطوط گذرنده بر  $P$  را با معادله (c) حل میکنیم :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0 \\ y = mx - m\alpha + \beta \end{cases}$$

پس از حذف  $y$  بین معادلات و اختصار خواهیم داشت :

$$(m^2 - 2m + 1)x^2 - 2(m^2\alpha - m\beta - m\alpha + \beta + m + 1)x + m^2\alpha^2 + \beta^2 - 2m\alpha\beta + 2m\alpha - 2\beta = 0$$

برای اینکه خطوط گذرنده بر  $P$  بر (c) مماس باشند لازم و کافیست که مماس معادله بالا برابر صفر باشد که پس از اختصار داریم :

$$\Delta = (\epsilon\alpha + 1)m^2 - 2(2\alpha + 2\beta - 1)m + \epsilon\beta + 1 = 0$$

چنانچه در این معادله  $\frac{c}{a} = -1$  باشد اولاً معادله

دارای دو جواب  $m'$  و  $m''$  خواهد بود و ثانیاً چون  $m'm'' = -1$  است بنا براین دو مماس مرسوم از  $P$  (با ضریب زاویه های  $m'$  و  $m''$ ) بر یکدیگر عمود میباشند

$$\frac{c}{a} = \frac{\epsilon\beta + 1}{\epsilon\alpha + 1} = -1 \rightarrow 2\beta + 2\alpha = 1$$

و نتیجه میشود که مکان  $P$  عبارت است از خط به معادله

$$2y + 2x = 1$$

تبصره - خط مکان  $P$  بر محور تقارن منحنی (c)

عمود است. ثابت میشود که منحنی (c) یک سهمی است و خط مکان  $P$  خط هادی آن میباشد.

(۴) فرض میکنیم  $N(\alpha, \beta)$  پای قائم مرسوم از

$M(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  بر منحنی (c) باشد پس از تعیین ضریب زاویه

خط قائم وبعد از اختصار معادلات زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta = 0 \\ (\alpha - \beta)(2\alpha + 2\beta - 1) = 0 \end{cases}$$

و از این دستگاه مقادیر زیر برای  $\alpha$  و  $\beta$  بدست خواهد آمد.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha = 0 & \alpha = \frac{3}{4} & \alpha = -\frac{1}{4} \\ \hline \beta = 0 & \beta = -\frac{1}{4} & \beta = \frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

و در نتیجه از نقطه  $M$  سه خط با معادلات زیر، قائم بر-

منحنی (c) میتوان رسم نمود :

$$y = x \text{ و } y = \frac{3}{4} \text{ و } x = \frac{3}{4}$$

حل مسأله ۱۵۴۵- تابع  $y = ax^2$  مقروض است، اثبات

اینکه در ازاء هر دو عدد متمایز دلخواه  $\alpha$  و  $\beta$  يك عدد و فقط يك عدد مانند  $\gamma$  وجود دارد بطوریکه رابطه زیر برقرار باشد.

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha)f'(\gamma) \quad (1)$$

مشتق تابع برابر است با  $y' = 2ax$  و رابطه فوق

عبارت خواهد شد از :

$$a\beta^2 - a\alpha^2 = (\beta - \alpha) \times 2a\gamma$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha) \times 2\gamma$$

و پس از ساده کردن عبارت و حذف  $\beta - \alpha \neq 0$  بدست

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ میآید}$$

یعنی  $\alpha$  و  $\beta$  متمایز هرچه باشند همواره فقط يك مقدار

$\gamma$  وجود دارد تا رابطه (۱) برقرار باشد.

مورد استعمال - اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه دلخواه از منحنی

(c) نمایش هندسی تابع  $y = ax^2$  باشد فرض میکنیم  $\alpha$  و  $\beta$  طولهای این دو نقطه باشند. ضریب زاویه خط  $AB$  برابر

خواهد بود با  $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$  و چنانچه  $C$  نقطه ای از منحنی

(c) با طول  $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$  باشد (که مسلماً  $C$  بر کمان  $AB$

واقع خواهد بود) ضریب زاویه مماس در نقطه  $C$  بر منحنی (c)

برابر است با  $f'(\gamma) = f'(\frac{\alpha + \beta}{2})$  و از رابطه (۱) معلوم

میشود که مماس در نقطه  $C$  با خط  $AB$  موازی است. اگر

$I$  نقطه وسط  $AB$  باشد طول  $I$  برابر است با  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  و در نتیجه

خط  $CI$  با محور  $y'y$  یا محور تقارن منحنی (c) موازی میباشد



روابط زیر را در نظر میگیریم

$$\sin^2 \frac{x}{3} = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{3}{4} \sin \frac{x}{3}$$

$$\sin^2 \frac{x}{3^2} = 3 \left( -\frac{1}{4} \sin \frac{x}{3} + \frac{3}{4} \sin \frac{x}{3^2} \right)$$

.

$$\sin^2 \frac{x}{3^n} = 3^{n-1} \left( -\frac{1}{4} \sin \frac{x}{3^{n-1}} + \frac{3}{4} \sin \frac{x}{3^n} \right)$$

از جمع روابط فوق حاصل میشود

$$S_n = \frac{1}{4} \left( 3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x \right)$$

محل مسئله ۱۵۵۱ - با توجه به

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

روابط زیر را مینویسیم

$$\operatorname{Arctg} \frac{q-1}{\frac{1}{a_1} + a_1} = \operatorname{Arctg} a_2 - \operatorname{Arctg} a_1$$

$$\operatorname{Arctg} \frac{q-1}{\frac{1}{a_2} + a_2} = \operatorname{Arctg} a_3 - \operatorname{Arctg} a_2$$

.

$$\operatorname{Arctg} \frac{q-1}{\frac{1}{a_n} + a_n} = \operatorname{Arctg} a_{n+1} - \operatorname{Arctg} a_n$$

از جمع نظیر بنظر طرفین روابط بالا نتیجه خواهد شد .

$$S_n = \operatorname{Arctg} a_{n+1} - \operatorname{Arctg} a_1$$

حل مسئله ۱۵۵۲ - از تساوی های داده شده روابط

زیر را بدست میآوریم

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_1)} \text{ یا } \frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\sin(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

از ضرب طرفین رابطه در  $\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$  بدست میآید

$$\frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2} \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(2\alpha + 2\varphi_2) - \cos(2\alpha + 2\varphi_1)$$

یکان

حل مسئله ۱۵۴۶ - تعیین معادله مکان هندسی

نقطه M :

$$M \begin{cases} x = \frac{a-b-2mc}{1+m^2} \text{ و} \\ y = \frac{(a-b)m-m^2c+c}{1+m^2} \end{cases}$$

خواهیم داشت  $y - mx = c$  که از این رابطه مقدار  $m$

بر حسب  $x$  و  $y$  بدست آمده و چون در یکی از روابط طول یا

عرض  $M$  قرار دهیم معادله مکان  $M$  به صورت زیر بدست میآید

$$\left(x - \frac{a-b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + c^2$$

حل مسئله ۱۵۴۷ - چون يك دفعه از تابع

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y = 2y' \sqrt{1+x^2} \quad (1)$$

بگیریم پس از ساده کردن و با توجه به رابطه (۱) نتیجه

خواهد شد :

$$\varepsilon(1+x^2)y'' + \varepsilon xy' - y = 0$$

حل مسئله ۱۵۴۸ - رابطه مفروض

$$\cos^2 2\alpha + \cos^2 \alpha + \lambda^2 \cos^2 \alpha = \lambda^2$$

$$\cos^2 2\alpha = \lambda^2 \left( \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} \right) = \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \pm \lambda \operatorname{tg} \alpha$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 2 - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \pm \lambda \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) (1 \pm \lambda \operatorname{tg} \alpha) = 2$$

یا

حل مسئله ۱۵۴۹ - اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  سه جمله متوالی از يك

تساعده حسابی با قدر نسبت  $d$  باشند داریم

$$(1) \frac{a+c}{2} = b \text{ و } \frac{c-a}{2} = d \text{ و } a-b = b-c$$

$$\sin(a-b) = \sin(b-c)$$

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin b \cos c - \cos b \sin c$$

$$\cos b (\sin a + \sin c) = \sin b (\cos a + \cos c)$$

عبارت داخل هريك از دو پرانتز را به حاصل ضرب تبدیل

نموده با توجه به روابط (۱) و حذف جمل متشابه از طرفین

بدست خواهد آمد :

$$\cos a + \cos c = 2 \cos b \cos d$$

حل مسئله ۱۵۵۰ - تعیین مجموعه زیر

$$S_n = \sin^2 \frac{x}{3} + 3 \sin^2 \frac{x}{9} + \dots + 3^{n-1} \sin^2 \frac{x}{3^n}$$

$$\begin{cases} x-1=4 \\ y-2=1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

**حل مسئله ۱۵۵۶ -** فرض میکنیم  $q$  خارج قسمت و  $r$  باقیمانده تقسیم  $a-1$  بر  $b$  باشد داریم

$$\begin{cases} a-1=bq+r \\ r < b-1 \end{cases}$$

طرفین هر دو رابطه را در  $b^n$  ضرب می‌نمائیم

$$\begin{cases} ab^n - b^n = b^{n+1}q + rb^n \\ rb^n \leq b^{n+1} - b^n \\ ab^n = b^{n+1}q + (rb^n + b^n) \\ rb^n + b^n \leq b^{n+1} \end{cases}$$

روابط بالا به صورت زیر نوشته میشوند

$$\begin{cases} ab^n - 1 = b^{n+1}q + (rb^n + b^n - 1) \\ rb^n + b^n - 1 < b^{n+1} \end{cases}$$

و معلوم میشود که  $q$  خارج قسمت و  $rb^n + b^n - 1$  باقیمانده تقسیم  $ab^n - 1$  بر  $b^{n+1}$  میباشد.

**حل مسئله ۱۵۵۷ -** رشته تساویهای زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} N &= 2(a_1 + 3a_2 + \dots + 3 \times 4 \times \dots \times na_n) + a_1 = \\ &= 2N_1 + a_1 \quad (0 < a_1 < 1) \\ N_1 &= 3(a_1 + 4a_2 + \dots + 4 \times \dots \times na_n) + a_1 = \\ &= 3N_2 + a_1 \quad (0 < a_1 < 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{n-2} &= (n-1)(a_{n-1} + na_n) + a_{n-2} = \\ &= (n-1)N_{n-1} + a_{n-2} \quad (0 < a_{n-2} \leq n-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{n-1} &= na_n + a_{n-1} = nN_{n-1} + a_{n-1} \\ &\quad (0 < a_{n-1} \leq n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{n-1} &= (n+1) \times 0 + a_n = (n+1)N_n + a_n \\ &\quad (0 < a_n \leq n+1) \end{aligned}$$

تساویهای بالا نشان میدهد که:

$N_1$  و  $a_1$  بترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم  $N$  بر ۲ میباشد.

$N_2$  و  $a_2$  بترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم  $N_1$  بر ۳ است.

$$\frac{A_r + A_r \sin^2(\varphi_r - \varphi_r)}{A_r - A_r} = \cos(2\alpha + 2\varphi_r) - \cos(2\alpha + 2\varphi_r)$$

$$\frac{A_n + A_1 \sin^2(\varphi_n - \varphi_1)}{A_n - A_1} = \cos(2\alpha + 2\varphi_1) - \cos(2\alpha + 2\varphi_n)$$

از جمع نظیر بنظیر طرفین روابط معلوم خواهد شد که مجموع جمل طرف اول برابر با صفر است یعنی رابطه مطلوب بدست میآید.

**حل مسئله ۱۵۵۳ -** در دستگاه شمار باجه پایه داریم.

$$\begin{aligned} 122 \times 103 &= 13121 \\ \text{اگر پایه دستگاه را } x \text{ فرض کنیم} \\ (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 3) &= x^4 + 3x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1 \\ \text{و پس از ساده کردن بدست خواهد آمد.} \end{aligned}$$

$x(x^2 - 4x - 4) = 0$   
و چون  $x$  عدد صحیح بزرگتر از یک بوده و ۵ فقط به یک صورت  $5 \times 1$  تجزیه میشود لذا تساوی وقتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x=5 \\ x^2 - 4x - 4 = 1 \end{cases}$$

$x=5$  در معادله دوم نیز صدق نموده و جواب مسئله میباشد.

**حل مسئله ۱۵۵۴ -** در دستگاه شمار باجه پایه داریم

$$\begin{aligned} 1312 &= 2104 \\ \text{مانند مسئله قبل عمل میشود و جواب عبارت خواهد بود} \\ \text{از پایه } 7 \end{aligned}$$

**حل مسئله ۱۵۵۵ -** تعیین دو عدد صحیح و مثبت که اگر یک واحد به اولی و دو واحد به دومی اضافه کنیم حاصل ضرب آنها دو برابر گردد

داریم  $(x+1)(y+2) = 2xy$  و این رابطه بترتیب چنین مینویسیم

$$xy + 2x + y + 2 = 2xy$$

$$xy - 2x - y - 2 = 0$$

$$x(y-2) - (y-2) - 4 = 0$$

$$(x-1)(y-2) = 4 = 1 \times 4 = 2 \times 2 = 4 \times 1$$

و دستگاههای زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x-1=2 \\ y-2=2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$



$$(\vec{MP}_i)^2 = (\vec{OP}_i)^2 + (\vec{OM})^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP}_i$$

$$(\vec{MP}_i)^2 = (\vec{OP}_i)^2 + (\vec{OM})^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP}_i$$

$$(\vec{MP}_i)^2 = r^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP}_i$$

$$\Sigma(\vec{MP}_i)^2 = nr^2 - 2\vec{OM}(\Sigma\vec{OP}_i)$$

و چون  $\Sigma\vec{OP}_i = 0$

$$S = \Sigma(\vec{MP}_i)^2 = nr^2$$

**حل مسئله ۱۵۵۹** - اولاً اثبات اینکه شرط لازم و کافی برای اینکه  $G$  مرکز ثقل يك مثلث  $ABC$  باشد آن است که

$$(۱) \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$$

اگر  $A'$  وسط ضلع  $BC$  از مثلث  $ABC$  و نقطه‌ای از صفحه مثلث باشد شرط لازم و کافی برای اینکه  $G$  مرکز ثقل

مثلث باشد آن است که  $\vec{GA} + 2\vec{GA}' = 0$  و چون

$$\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA}'$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$$

ثانیاً اگر  $O$  مرکز

دایره محیطی مثلث

$ABC$  و  $A'$  و  $B'$  و

$C'$  و اوساط  $a$  و  $b$  و

$C$  و طولهای اضلاع

$BC$  و  $CA$  و  $AB$

باشد بر  $A'x$  و  $B'y$  و

$C'z$  عمود منصف‌های

اضلاع نقاط  $A_1$  و  $B_1$  و  $C_1$  را تعیین میکنیم که

$$\vec{A'A_1} = K\vec{a} \text{ و } \vec{B'B_1} = K\vec{b} \text{ و } \vec{C'C_1} = K\vec{c}$$

باشد ( $K$  عددی است جبری) در دوران به مرکز  $O$  و به

زاویه  $90^\circ$  درجه حامل‌های  $\vec{A'A_1}$  و  $\vec{B'B_1}$  و  $\vec{C'C_1}$  به

حامل‌های  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  تبدیل میشوند و داریم

$$\vec{u} = K \cdot \vec{BC} \text{ و } \vec{v} = K \cdot \vec{CA} \text{ و } \vec{w} = K \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = K(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) = 0$$

$$(۲) \vec{A'A_1} + \vec{B'B_1} + \vec{C'C_1} = 0 \text{ پس}$$

برای اثبات اینکه  $G$  مرکز ثقل مثلث  $A_1B_1C_1$  می‌باشد

مینویسیم:

$$\vec{GA_1} = \vec{GA'} + \vec{A'A_1} = -\frac{1}{3}\vec{GA} + \vec{A'A_1}$$

و بالاخره  $N_{n-1}$  و  $a_{n-1}$  بترتیب خارج قسمت

و باقیمانده تقسیم  $N_{n-2}$  بر  $n$  میباشد یا بعبارت دیگر از تقسیمات

متوالی  $N$  بر اعداد  $۳$  و  $۴$  و ... خارج قسمت‌های  $N_1$  و  $N_2$

و  $N_3$  و ... حاصل میشود و چون مقسوم علیه‌ها بترتیب

بزرگ میشوند خارج قسمت‌ها بترتیب کوچک شده بالاخره آخرین

قسمت برابر صفر میشود.

اگر طرفین روابط بالا را به یائین بترتیب در  $۱$

و  $۲!$  و  $۳!$  و ... و  $(n-1)!$  و  $n!$  ضرب کرده پس از آن

طرفین روابط را عضو به عضو باهم جمع کنیم جمله‌های  $N_1$  و

... و  $N_{n-1}$  حذف شده خواهد شد:

$$N = a_1 + a_2 \times 2! + a_3 \times 3! + \dots + a_n \times n!$$

تبصره - عملاً بسط فوق را میتوان به روش زیر انجام داد

$$\begin{array}{r} N | 2 \\ a_1 | N_1 \quad | 3 \\ a_2 | N_2 \quad | 4 \\ a_3 | N_3 \quad \dots \end{array}$$

$$\frac{N_{n-1}}{a_n} \mid \frac{n+1}{1}$$

مثال عددی برای  $N = 31457$

$$\begin{array}{r} 31457 | 2 \\ 15728 | 3 \\ 25242 | 4 \\ 21310 | 5 \\ 2622 | 6 \\ 443 | 7 \\ 16 | 8 \\ 6 | 9 \end{array}$$

و نتیجه میشود:

$$N = 1 + 2 \times 2! + 2 \times 3! + 0 \times 4! + 4 \times 5! +$$

$$1 \times 6! + 0 \times 7!$$

**حل مسئله ۱۵۵۸** - نقاط  $P_1$  و  $P_2$  و ... و  $P_n$

رأسهای متوالی يك ضلعی منتظم محذب محاط در دایره به

شعاع  $r$  و به مرکز  $O$  و  $M$  نقطه دلخواهی از این دایره میباشد

(۱) نظیر آنچه در حل مسئله ۱۲۲۴ (راه دوم - صفحه

۳۰ مجله شماره ۸) و حل مسئله ۱۴۹۲ (صفحه ۴۶ شماره ۸)

پیان شده است معلوم میشود که

$$\Sigma \vec{OP}_i = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \dots + \vec{OP}_n = 0$$

(۲) بترتیب چنین مینویسیم

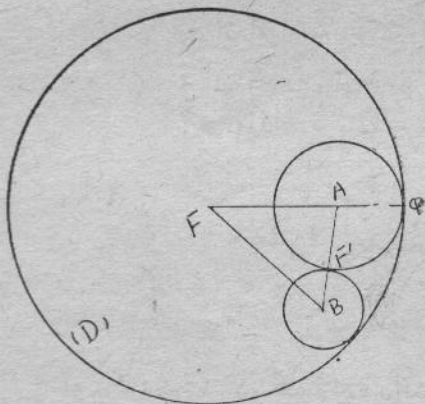
$$\vec{MP} = \vec{OP}_1 - \vec{OM}$$

با قسمت الف معلوم خواهد شد که :

(۱) اگر  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$  در يك طرف (P) واقع باشند  
زاویه AOB حاده خواهد بود

(۲) چنانچه  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$  طرفین (P) واقع باشند  
زاویه AOB منفرجه خواهد بود

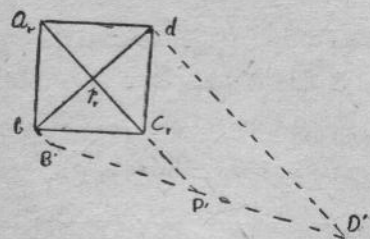
**حل مسأله ۱۵۶۱-** اولاً شرط لازم و کافی برای اینکه  
A نقطه‌ای از بیضی باشد به‌کانوهای F و F' و دایره هادی  
(D) نظیر کانون I' آن است که دایره به‌مرکز A و مماس بر  
(D) بر F' بگذرد و بنابراین مکان F' عبارت خواهد بود از  
دایره به‌مرکز A و مماس بر دایره (D).



ثانیاً - وقتی که  $AF'$  بیضی نظیر را در B قطع کند  
بین A و B واقع بوده و داریم  $BF' + BF = R$  و نتیجه  
میشود  $BF + BA = R + AF'$  و اگر  $AF = d$  باشد  
 $BF + BA = 2R - d$  و  $AF' = A\varphi = R - d$   
یعنی B بر بیضی باکانوهای F و A و با طول قطر بزرگتر  
 $2R - d$  واقع است.

**حل مسأله ۱۵۶۲-** تصویر قائم لوزی بر يك صفحه وقتی  
مربع خواهد بود که قطر کوچکتر لوزی با صفحه تصویر موازی  
باشد و در نتیجه خواهیم داشت  $ac = bd = AC = 4$ . اگر  
P مرکز لوزی باشد و P تصویر آن، رقوم با رقوم  
c و a و برابر با 4 است و چنانچه x رقوم b باشد داریم

$PB^2 = pb^2 + (x - 4)^2$  یا  $16 = 4 + (x - 4)^2$   
برای x مقادیر  $2 \pm 4\sqrt{3}$  حاصل میشود و چون x  
کوچکتر از 4 است پس رقوم b برابر خواهد بود با  $4 - 2\sqrt{3}$   
و تا 1. تقریب برابر 0.6 و رقوم d برابر خواهد شد با  
 $4 + 2\sqrt{3}$  و تا 1.1.



تقریب برابر با ۷.۴  
از راه ترسیم طبق  
شکل مقابل عمل میشود  
که پس از تعیین P'  
تسطیح p دایره به‌مرکز  
P' و به شعاع 4 نقاط B' و D' را بدست میدهد.

$$\vec{GB}_1 = -\frac{1}{4}\vec{GB} + \vec{B'B}_1, \vec{GC}_1 = -\frac{1}{4}\vec{GC} + \vec{C'C}_1$$

$$\vec{GA}_1 + \vec{GB}_1 + \vec{GC}_1 = -\frac{1}{4}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + \vec{A'A}_1 + \vec{B'B}_1 + \vec{C'C}_1$$

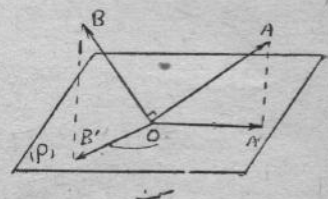
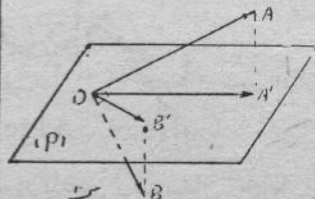
و با توجه به روابط (۱) و (۲) بدست می‌آید

$$\vec{GA}_1 + \vec{GB}_1 + \vec{GC}_1 = 0$$

یعنی G مرکز ثقل مثلث  $A_1B_1C_1$  میباشد.

**حل مسأله ۱۵۶۰-** اولاً در نظر میگیریم که

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \vec{OA'} + \vec{A'A} \text{ و } \vec{OB} = \vec{OB'} + \vec{B'B} \\ \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= (\vec{OA'} + \vec{A'A}) \cdot (\vec{OB'} + \vec{B'B}) = \\ &= \vec{OA'} \cdot \vec{OB'} + \vec{OA'} \cdot \vec{B'B} + \vec{OB'} \cdot \vec{A'A} + \\ &\quad \vec{A'A} \cdot \vec{B'B} \end{aligned}$$



چون زاویه دو حامل  $\vec{OA'}$  و  $\vec{B'B}$  و همچنین زاویه دو حامل  
 $\vec{A'A}$  و  $\vec{OB'}$  قائمه است بنابراین

$$\vec{OA'} \cdot \vec{B'B} = \vec{OB'} \cdot \vec{A'A} = 0$$

و در نتیجه

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA'} \cdot \vec{OB'} + \vec{A'A} \cdot \vec{B'B}$$

و یا عبارت دیگر

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA'} \cdot \vec{OB'} + \vec{A'A} \cdot \vec{B'B} \quad (۱)$$

ثانیاً - الف) فرض میکنیم زاویه AOB قائمه باشد در  
این صورت داریم

$$\vec{OA'} \cdot \vec{OB'} = -\vec{A'A} \cdot \vec{B'B}$$

و حالات زیر را در نظر میگیریم

(۱)  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$  هر دو در يك طرف صفحه (P) واقع

باشند که  $\vec{A'A} \cdot \vec{B'B} > 0$  بوده و  $\vec{OA'} \cdot \vec{OB'} < 0$  در نتیجه  
زاویه  $A'OB'$  منفرجه میباشد (شکل ۱)

(۲)  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$  طرفین صفحه (P) واقع باشند در این

صورت  $\vec{A'A} \cdot \vec{B'B} > 0$  و  $\vec{OA'} \cdot \vec{OB'} > 0$  بوده زاویه  
 $A'OB'$  حاده میباشد.

ب- بفرض اینکه زاویه  $A'OB'$  قائمه باشد بطریق مشابه



## راهنمای ریاضیات متوسطه

روشهای استدلال در ریاضیات متفاوت است. یکی از روشهای استدلال که با آن به خوبی آشنا هستید، روش استدلال قیاسی است. همانطور که می‌دانید، در این روش از اصول و مفروضاتی استفاده می‌شود و نتایجی با برهان و اتکاء به آنچه قبلاً ثابت شده است اثبات می‌گردد. همه قضایائی که در هندسه خوانده‌اید از همین راه استدلال شده‌اند. اما روش دیگری برای استدلال در ریاضیات هست که به آن روش استقرائی می‌گویند. در برنامه‌های دبیرستانهای پیشتر ممالک، این روش را نیز جزء مواد گنجانده‌اند و دانش آموزان را با آن آشنا می‌سازند.

مجله یکان در صدد بود که مقاله‌ای در این زمینه تهیه و تقدیم خوانندگان عزیز خود کند. خوشبختانه قبل از اقدام به این کار آقای محمد شریف زاده دانش‌آموز سال پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی مقاله‌ای در این خصوص ترجمه و برای مجله ارسال داشته‌اند. پشت کار و دقت و کوشش ایشان درخور تحسین است. دانش‌آموزان عزیز را به خواندن این مقاله و حل تمرینهای آن دعوت می‌کنیم. «یکان»

## استقراء ریاضی

ترجمه از کتاب College Algebra

توسط: محمد شریف زاده دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان خوارزمی شماره ۲

I - قضیه بازاء  $n=1$  صحیح است.

II - اگر قضیه بازاء يك مقدار مشخصی از  $n (n=k)$  صحیح باشد حتماً بازاء مقدار بزرگتر قابل قبول بعدی  $n (n=k+1)$  نیز صحیح است. قضیه بازاء تمام مقادیر صحیح و مثبت  $n$  درست خواهد بود.

**اثبات قضیه اساسی:** به دو طریق میتوان این قضیه را اثبات کرد:

۱- **اثبات مستقیم:** میدانیم که بنابر (I) قضیه بازاء  $n=1$  صحیح است و بنابر (II) اگر قضیه برای مقدار معینی صحیح باشد بازاء مقدار بزرگتر بعدی  $n$  نیز صحیح است؛ بنابراین چون قضیه به ازاء  $n=1$  صحیح است بازاء  $n=2$  نیز درست است و به همین ترتیب بازاء  $n=3$  صحیح است، الی آخر. یعنی قضیه بازاء هر مقدار صحیح مثبت  $n$  درست است.

۲- **اثبات غیر مستقیم (برهان خلف):** فرض میکنیم که صحت (I) و (II) محقق شده است و باز فرض میکنیم که قضیه بازاء يك مقدار صحیح مثبت  $n$  درست نباشد و مثلاً  $m+1$  کوچکترین مقدار از  $n$  باشد که قضیه بازاء آن صحیح نیست. بنابراین قضیه بازاء  $m$  و  $m-1$  و  $m-2$  و ... و  $n=1$  صحیح است. ( $m$  عددی صحیح و مثبت است) و لیکن بازاء  $n=m+1$  صحیح نیست. میدانیم که بنابر (I) قضیه بازاء  $n=1$  درست

استقراء ریاضی روشی برای اثبات قضایا است. این روش اغلب برای اثبات قضایائی بکار میرود که دارای متغیر خاصی هستند. مثلاً در زیر بكمك استقراء ریاضی ثابت خواهد شد که مجموع  $n$  عدد فرد متوالی مساوی  $n^2$  میباشد. اثبات يك قضیه توسط استقراء ریاضی عموماً شامل سه قسمت میباشد:

۱- **تحقیق:** در این قسمت باید تحقیق کرد که قضیه به ازاء يك یا چند مقدار اختصاصی از متغیر صحیح است. معمولاً چنانچه  $n$  متغیر مفروض باشد، تحقیق می‌کنند که قضیه بازاء  $n=1$  صحیح است.

۲- **تعمیم:** در این قسمت باید ثابت کرد که هر گاه قضیه بازاء يك مقدار معینی از متغیر مثلاً  $n=k$  صحیح باشد، بازاء  $n=k+1$  نیز صحیح خواهد بود. این قسمت عموماً مشکل‌ترین قسمت می‌باشد.

۳- **نتیجه:** پس از اینکه قسمت ۱ به تحقیق و قسمت ۲ باثبات رسید نتیجه میشود که قضیه بازاء تمام مقادیر صحیح مثبت  $n$  درست است.

با توجه به مطالب بالا قضیه اساسی استقراء ریاضی بصورت زیر بیان میگردد:

**قضیه اساسی استقراء ریاضی:** هر گاه در قضیه‌ای (مربوط با عدد صحیح مثبت از متغیر  $n$ ) معین شود که:

است، بنابراین  $m > 1$  و بنابر (II) هرگاه قضیه بازاء  $n=m$  صحیح باشد، بازاء  $n=m+1$  نیز باید صحیح باشد پس هرگاه صحت I و II تحقیق شود قضیه بازاء تمام مقادیر صحیح مثبت  $n$  درست است.  
درمثالهای زیر روش اثبات بعضی ازقضایا بوسیله استقراء ریاضی مشاهده میشود.

### مثال ۱:

ثابت کنید که بازاء تمام مقادیر صحیح و مثبت  $n$  داریم:

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2 \quad (1)$$

**اثبات - اولاً تحقیق:** اگر  $n=1$  فرض شود رابطه

به صورت  $1=1$  بوده و درست میباشد.

**ثانیاً تعمیم:** حال باید ثابت نمود که هرگاه رابطه (۱)

بازاء یک مقدار معینی از  $n$  مثلاً  $n=k$  صحیح باشد، بازاء

مقدار بزرگتر بعدی  $n$  یعنی  $n=k+1$  نیز صحیح است،

بنابراین فرض میکنیم:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2 \quad (2)$$

و باید ثابت کنیم که هرگاه رابطه (۲) صحیح باشد رابطه (۱)

بافرض  $n=k+1$  نیز صحیح خواهد بود:

$$1+3+5+\dots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2 \quad (3)$$

رابطه اخیر پس از ساده کردن و با توجه به رابطه (۲)

به صورت زیر نوشته میشود:

$$[1+3+5+\dots+(2K-1)]+(2K+1)=K^2+2K+1=(K+1)^2$$

**ثالثاً نتیجه:** در بالا ثابت شد که قضیه بازاء  $n=1$

صحیح است و همچنین هرگاه قضیه بازاء  $n=K$  صحیح باشد

بازاء  $n=K+1$  نیز صحیح است بنابراین بنابر قضیه اساسی

رابطه (۱) بازاء تمام مقادیر صحیح مثبت  $n$  درست است.

### مثال ۲:

با استفاده از استقراء ریاضی ثابت کنید که:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) =$$

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad (4)$$

### اثبات -

**تحقیق:** طرف چپ رابطه (۴) از  $n$  جمله تشکیل یافته

است. هرگاه  $n=1$  فرض شود، خواهیم داشت:

$$1 \times 2 = \frac{1}{3} \times 1(1+1)(1+2) = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2$$

$$2=2$$

یا

یعنی رابطه (۳) بازاء  $n=1$  صحیح است.

**تعمیم:** حال باید ثابت کنیم که هرگاه رابطه (۴) بازاء

$n=K$  صحیح باشد، بازاء  $n=K+1$  نیز صحیح است.

ابتدا رابطه زیر را مینویسیم:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + K(K+1) = \frac{1}{3}K(K+1)(K+2) \quad (5)$$

و هرگاه رابطه (۵) صحیح باشد باید ثابت کنیم که رابطه زیر

نیز صحیح است:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (K+1)(K+2) = \frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3) \quad (6)$$

(این رابطه از قرار دادن  $n=K+1$  در رابطه (۴)

بدست آمده است)

عبارت طرف چپ رابطه (۶) به صورت زیر است.

$$[1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + K(K+1)] + (K+1)(K+2)$$

میدانیم که بنابر رابطه (۵) مقدار داخل کروشه برابر

است با:

$$\frac{1}{3}K(K+1)(K+2)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (K+1)(K+2) &= \frac{1}{3}K(K+1)(K+2) + (K+1)(K+2) \\ &= (K+1)(K+2) \left( \frac{K}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{3}(K+1)(K+2)(K+3) \end{aligned}$$

یعنی اگر (۵) صحیح باشد، (۶) نیز صحیح است.

**نتیجه:** بنابر قضیه اساسی، رابطه (۴) بازاء تمام مقادیر

صحیح مثبت  $n$  درست است.

**توجه:** در قسمت اول اثبات، معمولاً تحقیق با کوچکترین

عدد صحیح مثبت انجام میگردد. در بعضی از موارد ممکن نیست

که بازاء  $n=1$  قضیه را تحقیق کرد، مثلاً در رابطه:

$$\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-2}{3(n+1)}$$

تحقیق باید بازاء  $n=3$  انجام گیرد چه بازاء  $n=1$

یا  $n=2$  طرف چپ رابطه معنی نخواهد داشت.



مثال ۳ :

ثابت کنید که هرگاه  $n$  عددی صحیح مثبت باشد ،

$$x^n - y^n \text{ بر } x - y \text{ قابل قسمت است .}$$

اثبات (با روش استقراء ریاضی) :

تحقیق : قضیه بازاء  $n=1$  صحیح است چون دراین

صورت مقدار عبارت برابر خواهد شد با  $x-y$  که بر  $x-y$  قابل قسمت است.

تعمیم: باید ثابت کنیم که هرگاه  $x^k - y^k$  بر  $x - y$

قابل قسمت باشد  $x^{k+1} - y^{k+1}$  نیز بر  $x - y$  قابل قسمت است برای این منظور مینویسیم :

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x \times x^k - y \times y^k - xy^k + xy^k = x(x^k - y^k) + y^k(x - y)$$

و چون قبلاً فرض کردیم که  $x^k - y^k$  بر  $x - y$  قابل قسمت است ، این عبارت که هر دو جمله آن بر  $x - y$  قابل قسمت است نیز بر  $x - y$  قابل قسمت است .

نتیجه : وبنابر قضیه اساسی ، این قضیه به ازاء تمام مقادیر صحیح و مثبت  $n$  صادق است .

### تمرینات

باروش استقراء ریاضی فرمولهای زیر را ثابت کنید :

$$۱) ۱+۲+۳+.....+n = \frac{1}{2}n(n+۱)$$

$$۲) ۱+۵+۹+.....+(۴n-۳)=n(۲n-۱)$$

$$۳) ۱^۲+۲^۲+۳^۲+.....+n^۲ = \frac{1}{6}n(n+۱)(۲n+۱)$$

$$۴) ۱^۳+۲^۳+۳^۳+.....+n^۳ = \frac{1}{4}n^۲(n+۱)^۲$$

$$۵) ۱^۳+۲^۳+۳^۳+.....+n^۳ = (۱+۲+۳+.....+n)^۲$$

$$۶) ۱^۳+۳^۳+۵^۳+.....+(۲n-۱)^۳ = n^۲(۲n^۲-۱)$$

$$۷) ۱ \times ۶ + ۲ \times ۹ + ۳ \times ۱۲ + ..... + n(۳n+۳) = n(n+۱)(n+۲)$$

$$۸) ۱ \times ۲ \times ۳ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۳ \times ۴ \times ۵ + ..... + n(n+۱)(n+۲) = \frac{1}{4}n(n+۱)(n+۲)(n+۳)$$

$$۹) ۳+۳^۲+۳^۳+.....+۳^n = \frac{3}{2}(۳^n-۱)$$

$$۱۰) a+ap+ap^۲+.....+ap^{n-۱} = \frac{ap^n-a}{p-۱}$$

$$۱۱) \frac{1}{1 \times ۲} + \frac{1}{۲ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۴} + ..... + \frac{1}{n(n+۱)} = \frac{n}{n+۱}$$

$$۱۲) \frac{1}{۲} + \frac{1}{۲^۲} + \frac{1}{۲^۳} + ..... + \frac{1}{۲^n} = ۱ - \frac{1}{۲^n}$$

$$۱۳) \frac{1}{۱ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۵} + \frac{1}{۵ \times ۷} + ..... + \frac{1}{(۲n-۱)(۲n+۱)} = \frac{n}{۲n+۱}$$

$$۱۴) ۱ \times ۳ + ۳ \times ۵ + ۵ \times ۷ + ..... + (۲n-۱) \times (۲n+۱) = \frac{1}{3}n(۴n^۲+۶n-۱)$$

## آیا این پرسش و این پاسخ تعجب آور نیست؟

می دانید که تلاش وسیعی در دنیا برای نوکردن برنامه های ریاضیات مدارس آغاز شده است . پیشنهاد های متفاوتی بدین منظور از جانب متخصصان و مربیان شده است که همه در خور تعمق و تأمل است . کوشش همه براین است که راهی بیابند تا بتوانند از همان آغاز کار ریاضیات نوین و مفاهیم آن را به دانش آموزان عرضه کنند . یکی از شاخه های جدید ریاضیات منطق علامتی است . سؤال و جواب زیر که از صفحه ۶۲ مجله NEA ، ارمان انجمن ملی فرهنگیان آمریکا ، مورخ شهریور ۱۳۴۳ (سپتامبر ۱۹۶۴) ترجمه شده است مؤید آن است که انقلاب ریاضیات معاصر تاجه حد در برنامه های تحصیلی تأثیر داشته است .

سؤال : آیا شاگردان با استعداد در دبستان قادرند که منطق ریاضی را فراگیرند ؟

جواب : به موجب تحقیقی که به وسیله پاتریک ساپس و فردریک بیفورد به عمل آمده .

است ، آری . از ۲۶۰ نفر دانش آموزان سال پنجم ابتدایی که در شمار دانش آموزان ممتاز آمریکا قرار داشتند آزمایشی در این باره به عمل آمد . همین آزمایش بآدانشجویان دانشگاه که درس مقدماتی منطق ریاضی را خوانده بودند تکرار شد و نتیجه این دو آزمایش بایکدیگر مقایسه گردید . تجزیه که دانش آموزان سال پنجم ابتدایی در این رشته کسب کرده بودند در حدود ۸۵ تا ۹۰ درصد معلومات مکسب دانشجویان دانشگاه در این درس بوده است .

ترجمه از دکتر ع . ک . نویس رکانی

# حل مسائل نمونه

و ملاحظه میکنیم که :

$$\begin{aligned} a\alpha + a_1 &= a \times \alpha + a_1 = A \\ a\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 &= (a\alpha + a_1) \times \alpha + a_2 = A\alpha + a_2 = A_1 \\ a\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 &= A_1\alpha + a_3 \end{aligned}$$

بعبارت دیگر :

ضرب جمله اول خارج قسمت = ضرب جمله اول مقسوم  
ضرب جمله دوم خارج قسمت = ضرب جمله اول خارج قسمت  
 $\alpha \times$  ضرب جمله دوم مقسوم  
ضرب جمله سوم خارج قسمت = ضرب جمله دوم خارج قسمت  
قسمت  $\alpha \times$  ضرب جمله سوم مقسوم

باقیمانده تقسیم = ضرب آخرین جمله خارج قسمت  $\alpha \times$   
جمله معلوم مقسوم

مثال ۱ - تعیین خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر :

$$\begin{aligned} (4x^4 - 14x^3 + 6x^2 - 4x + 20) : (x - 3) \\ 4x^3 &= \text{جمله اول خارج قسمت} \\ (4x^3 - 14x^2) &= -2x^2 = \text{جمله دوم} \\ -2x^3 + 6x^2 &= \text{جمله سوم} \\ (0x^3 - 5) &= -5 = \text{جمله چهارم} \\ (-5x^3 + 20) &= \text{باقیمانده تقسیم} \\ 4x^3 - 2x^2 - 5 &= \text{یعنی خارج قسمت عبارت شد از} \end{aligned}$$

مثال ۲ - تعیین خارج قسمت و باقیمانده تقسیم :

$$(2x^7 + 26x^6 - 5x^5 - 270x^4 + 64x^3 - 42x^2 + 50x + 350) : (x + 7)$$

جمله‌های خارج قسمت بترتیب عبارتند از :

$$\begin{aligned} 1) \quad 2 &\rightarrow 2x^7 \\ 2) \quad 2(-7) + 26 &= 0 \rightarrow 0x^6 \\ 3) \quad 0(-7) - 5 &= -5 \rightarrow -5x^5 \\ 4) \quad -5(-7) - 270 &= -10 \rightarrow -10x^4 \\ 5) \quad 10(-7) + 64 &= -6 \rightarrow -6x^3 \\ 6) \quad -6(-7) - 42 &= 0 \rightarrow 0 \\ 7) \quad 0 \times (-7) + 50 &= 50 \rightarrow 50 \end{aligned}$$

باقیمانده تقسیم مساویست با

$$50(-7) + 350 = 0$$

مثال ۳ - در تقسیم

$$(x^5 - 4x^3 + 2x - 7) : (x - 2)$$

## کلاس های چهارم

۱۵۹۹ - بدون عمل تقسیم ، خارج قسمت چند جمله‌ای

مفروض را بر  $x - \alpha$  بدست آورید

چندجمله‌ای زیر را که نسبت به  $x$  از درجه  $n$  است در

نظم میگیریم

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

خارج قسمت تقسیم  $f(x)$  بر  $x - \alpha$  نسبت به  $x$  از درجه

$n - 1$  بوده و اولین جمله آن عبارت است از خارج قسمت تقسیم

$ax^n$  بر  $x$  (اولین جمله مقسوم بر اولین جمله مقسوم علیه) که

برابر میشود با  $ax^{n-1}$  و چون این جمله را در  $x - \alpha$  ضرب

نموده با تغییر علامت با جمله‌های همدرجه از مقسوم جمع نمائیم

مقسوم جزء اول بدست میآید که جمله اول آن عبارت است از :

$$a_1x^{n-1} + a\alpha x^{n-1} = (a\alpha + a_1)x^{n-1}$$

و از تقسیم این جمله بر اولین جمله مقسوم علیه یعنی  $x$  ، دومین

جمله خارج قسمت به صورت  $(a\alpha + a_1)x^{n-2}$  حاصل میشود و با این

قیاس میتوان کلیه جمله‌های خارج قسمت را تعیین کرد ، به شرح

زیر :

ضرب اولین جمله خارج قسمت نسبت به  $\alpha$  از درجه

صفر است

ضرب دومین جمله خارج قسمت نسبت به  $\alpha$  از درجه

یک است

ضرب آخرین جمله خارج قسمت نسبت به  $\alpha$  از درجه

$n - 1$  است

در هر يك از ضرب های فوق که نسبت به  $\alpha$  مرتب شده

است ضرایب بترتیب  $a, a_1, a_2, \dots, a_n$  بالآخره

$a_1, a_2, \dots, a_n$  میباشد به ترتیب زیر

جمله اول خارج قسمت  $ax^{n-1}$

جمله دوم  $(a\alpha + a_1)x^{n-2}$

جمله سوم  $(a\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)x^{n-3}$

جمله آخر خارج قسمت  $(a\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1})$



## کلاس های ششم

۱۶۰۱ - حل معادله زیر

$$\cos \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{2} + 2 = 0 \quad (1)$$

از معادله (۱) بدست می آید که

$$\sin \frac{x}{2} = 2 + \cos \frac{x}{3} > 1$$

ولزوماً بدست می آید که  $\cos \frac{x}{3} < -1$  و چون  $\cos \frac{x}{3} \geq -1$

بنابراین تنها مقداری از  $\cos \frac{x}{3}$  که در معادله صدق خواهد کرد

عبارتست از  $\cos \frac{x}{3} = -1$  و از روی آن از معادله (۱) حاصل

میشود که  $\sin \frac{x}{2} = 1$  بنابراین ریشه های معادله (۱) عبارتند از ریشه های مشترک دو معادله زیر :

$$\cos \frac{x}{3} = -1 \quad (1)$$

$$\sin \frac{x}{2} = 1 \quad (3)$$

از معادله (۲) حاصل خواهد شد .

$$\frac{x}{3} = 2k\pi + \pi \text{ یا } x = 6k\pi + 3\pi \quad (2')$$

و از معادله (۳) بدست می آید :

$$\frac{x}{2} = 2k'\pi + \frac{\pi}{2} \text{ یا } x = 4k'\pi + 3\pi \quad (3')$$

(k و k' اعداد صحیح هستند)

باید معلوم نمائیم بازاء چه مقادیر k و k' مقادیر x از

روابط (۲') و (۳') مشترکند برای این منظور مینویسیم .

$$6k\pi + 3\pi = 4k'\pi + 3\pi$$

$$3k = 2k' - 1 \quad \text{و یا}$$

طرف دوم عددی است فرد بنابراین طرف اول نیز باید

فرد باشد و نتیجه میشود  $2n + 1 = k$  و از روی آن خواهیم داشت

$$x = 6(2n+1)\pi + 3\pi = 12n\pi + 9\pi \quad (4)$$

که ریشه کلی معادله (۱) میباشد و در آن n نمایش عدد صحیح میباشد .

تبصره - انتهای کلیه کمانهایی که از (۴) بدست می آیند

در دایره مثلثاتی نقطه A' نقطه متقاطع A مبدأ کمانها میباشد

اما هر کمان که انتهایش A' باشد (مثلاً  $x = 5\pi$ ) جواب

معادله (۱) نخواهد بود .

(ترجمه از فرانسه)

ضرائب جمله های دوم و چهارم مقسوم صفر بوده و چون

طبق قاعده فوق عمل شود خارج قسمت عبارت خواهد شد از

$$x^4 + 2x^3 + 2 \quad \text{بدست می آید (ع.ر)}$$

## کلاس های پنجم

۱۶۰۰ - کشتی A در ۷۵ میلی شرق کشتی B قرار

داشته و با سرعت ۱۲ میل در ساعت در جهت از مشرق به مغرب

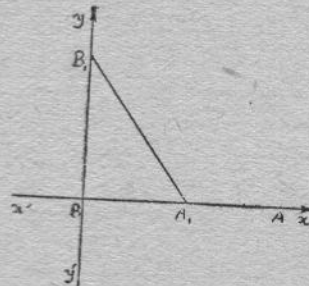
حرکت میکند ، کشتی B با سرعت ۹ میل در ساعت در جهت از

جنوب به شمال حرکت میکند

بعد از چه مدت فاصله این دو

کشتی می نیم (حداقل) خواهد

بود .



محور  $x'x$  را در امتداد

مغرب و مشرق و جهت مثبت آنرا

بطرف مشرق و محور  $y'y$  را

در امتداد جنوب بشمال اختیار

میکنیم و فرض میکنیم در ابتدا B بر مبدأ مختصات واقع باشد

یعنی در ابتدا داشته باشیم  $A(x=75, y=0)$  و  $B(x=0, y=0)$

A بر محور  $x'x$  و B بر محور  $y'y$  حرکت کرده و فرض میکنیم

وقتی که A به وضع  $A_1$  باشد B به وضع  $B_1$  واقع شود ،

چنانچه مدت زمان لازم برای اینکه A به وضع  $A_1$  و B به

وضع  $B_1$  در آید t باشد مختصات نقاط  $A_1$  و  $B_1$  عبارت خواهد

بود از

$$A_1(75 - 12t, 0) \text{ و } B_1(0, 9t)$$

طبق فرمول فاصله دو نقطه خواهیم داشت

$$A_1B_1 = \sqrt{(75 - 12t)^2 + 81t^2} =$$

$$= \sqrt{225t^2 - 1800t + 5625}$$

$$A_1B_1 = 15 \sqrt{t^2 - 12t + 37.5} = 15 \sqrt{(t-6)^2 + 9}$$

مقدار  $A_1B_1$  وقتی می نیم است که عبارت  $(t-6)^2 + 9$

نی نیم باشد ، این عبارت از مجموع دو جمله مثبت تشکیل شده

است که يك جمله آن ۹ مثبت است و در نتیجه عبارت وقتی

می نیم است که  $(t-6)^2$  می نیم یعنی برابر صفر باشد و خواهیم

داشت  $t = 6$  یعنی بعد از ۶ ساعت ، فاصله کشتی های A و B

می نیم می باشد

(ترجمه از انگلیسی - فرستنده : یدالله ارضی)

## فارغ التحصیلان ششم ریاضی

۱۶۰۲- در صفحه مجاورهای مختصات متعامد (ox و oy)

خط شکسته ABCD... KL را که دارای n ضلع AB و BC و ... و KL میباشد با شرایط زیر رسم نموده ایم.

نقطه A بر ox واقع بوده و  $OA = 1$  است.

نقطه B با زاویه‌های زیر مشخص شده است:

$$(\vec{OA} \text{ و } \vec{OB}) = \lambda \text{ و } (\vec{AB} \text{ و } \vec{AB}) = \alpha \text{ و}$$

$$(0 < \lambda < \alpha < \pi)$$

نقطه‌های C و D و ... و K و L قسمی واقع اند که

مثلث‌های OBC و OCD و ... و OKL با مثلث OAB متشابه میباشند.

(۱) طول OL را بر حسب  $\lambda$  و  $\alpha$  و n بدست آورید.

فرض معلوم بودن  $\lambda$ ، حدود  $\alpha$  را تعیین کنید برای آنکه وقتی n زیاد میشود طول OL تنزل نماید.

(۲) مقادیر  $\lambda$  و n معلوم اند و فرض میکنیم

$OL = q^n$  ( $q > 0$ )،  $\alpha$  را بر حسب  $\lambda$  و n و q بدست آورید

مثال عددی:  $\lambda = 90^\circ$  و  $n = 10$  و  $OL = 10$

(۳) اندازه جبری تصویر قائم  $\vec{AL}$  بر  $\vec{AB}$  را به  $\bar{P}$

نمایش می‌دهیم، از روی q که قبلاً ذکر شده است، یک دفعه بوسیله

مجموع n جمله و یک دفعه بوسیله مجموع ۲ جمله مقدار  $\bar{P}$  را حساب کنید.

با فرض  $0 < q < 1$  حد P را وقتی که n نامحدود

شود بدست آورید.

(۴) با استعمال مقادیر عددی مذکور در (۳) و در حالت  $0 < q < 1$

اندازه مجموع

$$S = 1 + \frac{\cos 9^\circ}{\sqrt{10}} + \frac{\cos 18^\circ}{\sqrt{100}} + \frac{\cos 27^\circ}{\sqrt{1000}} + \dots + \frac{\cos 9n^\circ}{\sqrt{10^n}} + \dots$$

را وقتی که تعداد جمله‌ها نامحدود باشد حساب کنید.

حل: (۱) از تشابه مثلث‌های OBC و OCD و ... و OKL

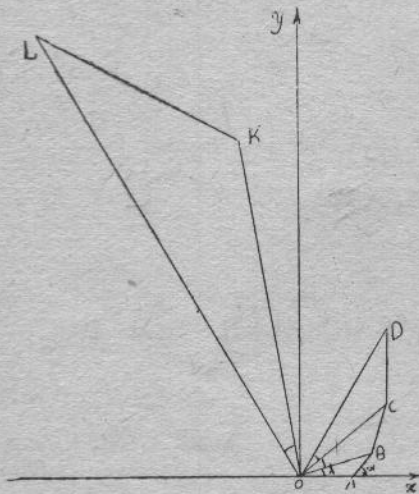
با مثلث OAB داریم:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BC}{OB} = \frac{OD}{OC} = \dots = \frac{OK}{OH} = \frac{OL}{OK} \\ = \sqrt[n]{\frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OL}{OK}} = \sqrt[n]{\frac{OL}{OA}}$$

و چون  $OA = 1$  است نتیجه میشود:

$$OL = \left(\frac{OB}{OA}\right)^n = OB^n$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \lambda)} \text{ و } OL = \left[\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \lambda)}\right]^n \quad (1)$$



برای اینکه OL تابعی نزولی از n باشد لازم و کافیست

$$\frac{OB}{OA} < 1 \text{ یا } OB < OA$$

که

$$\pi - \alpha < \alpha - \lambda \text{ یا } \alpha > \frac{\pi + \lambda}{2}$$

و بالاخره با توجه به مفروضات:

$$\frac{\pi + \lambda}{2} < \alpha < \pi \quad (2)$$

(۲) فرض  $OL = q^n$  رابطه (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$q = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \lambda)}$$

$$q(\sin \alpha \cos \lambda - \sin \lambda \cos \alpha) = \sin \alpha$$

$$q(\cos \lambda - \sin \lambda \cot \alpha) = 1$$

$$\cot \alpha = \cot \lambda - \frac{1}{q \sin \lambda} \quad (3)$$

مثال عددی: با فرض

$\lambda = 90^\circ$  و  $n = 10$  و  $OL = 10$  داریم:

$$q = \sqrt[10]{10} \approx 1.2589 \text{ یا } q^{10} = 10$$

و بالاخره نتیجه میشود

$$\cot \alpha = \cot 90^\circ - \frac{1}{q \sin 90^\circ}$$

$$\log \cot \alpha = -0.80029 \text{ و } \text{Antlog } -0.80029 = 1/3138$$

$$\cot \alpha = 1/3138$$

$$\log q = \frac{1}{10} = 0.10000 \text{ و } \log \sin \alpha = 1.19433$$

$$\log q \sin \alpha = 1.29433 \text{ و } \log \frac{1}{q \sin \alpha} = 0.70567$$

$$\text{Antlog } 0.70567 = 5.0778 = \frac{1}{q \sin \alpha}$$



$$(\vec{AB} \text{ و } \vec{OL}) = (\vec{Ox} \text{ و } \vec{OL}) - (\vec{Ox} \text{ و } \vec{AB}) = n\lambda - \alpha$$

$$(\vec{AB} \text{ و } \vec{OA}) = -\alpha \text{ و } OL = q^n$$

$$P = q^n \cos(n\lambda - \alpha) - \cos\alpha \quad (5)$$

اگر  $0 < q < 1$  و  $n \rightarrow \infty$  در اینصورت  $q^n \rightarrow 0$  و

چون  $\cos(n\lambda - \alpha)$  همواره محدود و محصور بین ۱ و -۱ است لذا  $P \rightarrow -\cos\alpha$

تبصره - از مقایسه روابط (۴) و (۵) و در  $P$  نتیجه

میشود که اگر  $0 < q < 1$  و  $n \rightarrow \infty$  داریم

$$1 + q \cos\lambda + q^2 \cos 2\lambda + \dots = -\frac{\cos\alpha \sin(\alpha - \lambda)}{\sin\lambda} \quad (6)$$

(۴) مجموع  $S$  همان طرف اول رابطه (۶) است که

$$q = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ و } \lambda = 9^\circ \text{ باشد پس}$$

$$S = -\frac{\cos\alpha \sin(\alpha - 9^\circ)}{\sin 9^\circ} \quad (7)$$

زاویه  $\alpha$  از معادله زیر تعیین میشود

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 9^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

که قبلاً در (۲) حساب شده است و بنابراین خواهیم

داشت

$$S = \frac{\cos 29^\circ 58' 30'' \times \sin 38^\circ 58' 30''}{\sin 9^\circ}$$

$$\log S = \log \cos 29^\circ 58' 30'' + \log \sin 38^\circ 58' 30''$$

$$+ \operatorname{co} \log \sin 9^\circ = \dots = 0.54136$$

$$S = 3.4783$$

(ترجمه از فرانسه)

## دانش آموز رتبه اول امتحانات نهائی



آقای علی پی براه  
دانش آموز ششم ریاضی آبادان  
در خرداد ماه ۱۳۴۳ با  
معدل ۱۸٫۴۹ در بین دانش-  
آموزان رشته ریاضی آبادان  
رتبه اول گردیده است.

آقای پی براه که امروز  
دانشجوی دانشکده فنی آبادان  
است در همه دوران تحصیل  
رتبه اول بوده و از لحاظ درس و

اخلاق رضایت اولیای دبیرستان را فراهم کرده است.  
رئیس دبیرستان رازی آبادان - دکتر نراقی  
فرستنده خبر: مطبوعاتی دهداری نمایندگی یکان

$$\cot \alpha = 63138 - 50.778 = 12336.$$

$$\log \cot \alpha = 0.9202 \text{ و } \log \cot 38^\circ 58' = 0.9215$$

$$60'' - 26''$$

$$x = 30''$$

$$x = 13$$

$$\alpha = 38^\circ 58' 30''$$

(۳) اولاً در نظر میگیریم:

$$\vec{AL} = \vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{KL}$$

تصویر قائم  $\vec{AL}$  بر محور محمل  $AB$  و هم جهت با

$\vec{AB}$  عبارت میشود از

$$\vec{P} = AB + BC \cos(\vec{AB} \text{ و } \vec{BC}) + \dots + KL \cos(\vec{AB} \text{ و } \vec{KL})$$

با توجه به روابط

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \lambda)} = q$$

$$(\vec{AB} \text{ و } \vec{BC}) = (\vec{BC} \text{ و } \vec{CD}) = \dots$$

$$= (\vec{HK} \text{ و } \vec{KL}) = \lambda$$

خواهیم داشت:

$$(\vec{AB} \text{ و } \vec{BC}) = \lambda \text{ و } (\vec{AB} \text{ و } \vec{CD}) = 2\lambda \text{ و } \dots$$

$$(\vec{AB} \text{ و } \vec{KL}) = (n-1)\lambda$$

$$BC = AB \cdot q \text{ و } CD = AB \cdot q^2 \text{ و } \dots$$

$$KL = AB \cdot q^{n-1}$$

و نتیجه خواهد شد:

$$\vec{P} = AB[1 + q \cos\lambda + q^2 \cos 2\lambda + \dots + q^{n-1} \cos(n-1)\lambda]$$

$$\text{از رابطه } \frac{AB}{\sin\lambda} = \frac{OA}{\sin(\alpha - \lambda)} \text{ بدست میآید}$$

$$AB = \frac{\sin\lambda}{\sin(\alpha - \lambda)}$$

و بالاخره نتیجه خواهد شد:

$$\vec{P} = \frac{\sin\lambda}{\sin(\alpha - \lambda)} [1 + q \cos\lambda + q^2 \cos 2\lambda + \dots + q^{n-1} \cos(n-1)\lambda] \quad (4)$$

ثانیاً داریم:  $\vec{AL} = \vec{OL} - \vec{OA}$  و چون آنرا بر

محور محمل  $\vec{AB}$  تصویر نمائیم خواهیم داشت:

$$\vec{P} = OL \cos(\vec{AB} \text{ و } \vec{OL}) - OA \cos(\vec{AB} \text{ و } \vec{OA})$$

# مسائل برای حل

(مهلت قبول پاسخ تا ۲۰ آذر ۴۳ - دانش آموزان هر کلاس از ارسال مسائل کلاس مقابل خودداری نمایند)

۱۶۰۸ - صحت تساوی زیر را تحقیق کنید .

$$\sqrt[4]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}=1$$

(حافظی)

۱۶۰۹ - بفرض اینکه  $a$  طول وتر و  $b$  و  $c$  طولهای دوزلع

دیگر از يك مثلث قائم الزاویه باشند حاصل عبارت زیر را تعیین کنید .

$$\left[ \frac{(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}})^{-1}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}} \right]^{-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{a+b}} + \left[ \frac{(\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{c}})^{-1}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}+\sqrt{c}}} \right]^{-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{a+c}}$$

۱۶۱۰ - ثابت کنید در هر تصاعد حسابی با جمله‌های

$a_1$  و  $a_2$  و ... و  $a_k$  و ... و  $a_n$  هر يك از دو رابطه زیر برقرار است :

$$1) (a_1)^2 - (a_2)^2 + (a_3)^2 - (a_4)^2 + \dots + (a_{2k-1})^2 - (a_{2k})^2 = \frac{k[(a_1)^2 - (a_{2k})^2]}{2k-1}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

(فرستنده : محمد شریفزاده)

۱۶۱۱ - ثابت کنید که اگر  $S_n$  و  $S_{2n}$  و  $S_{3n}$  به ترتیب

مجموع  $n$  جمله اول ، مجموع  $2n$  جمله اول و مجموع  $3n$  جمله اول از يك تصاعد هندسی باشند ، رابطه زیر محقق است .

$$S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$$

(فرستنده : مهندس عباس سعیدی)

۱۶۱۱ - قطعه خط ثابت  $AB$  به طول  $a$  مفروض است

نقطه  $M$  را بر  $AB$  اختیار میکنیم و مثلث متساوی الاضلاع  $AMD$  را میسازیم ، در نقطه  $D$  عمودی بر  $MD$  و در

## کلاس چهارم طبیعی

۱۶۰۳ - ثابت کنید که از تساوی

$$\frac{ad+b}{bc+a} = \frac{bd+a}{ac+b}$$

یکی از تساوی‌های  $|a|=|b|$  یا  $cd=1$  نتیجه میشود ( بهروز پرهامی - دانشجوی دانشکده فنی )

۱۶۰۴ - بفرض  $y = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$  اولاً مقدار  $y^2$  را حساب کنید .

ثانیاً حاصل کسر زیر را تعیین کنید :

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + 2}{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} - 2}$$

(حافظی - دبیر دبیرستان بنیس)

۱۶۰۵ - صحت تساوی زیر را بازنه  $x = 2 + \sqrt{2}$

تحقیق کنید .

$$\frac{x^3 - 3x - 2}{(x+1)^2} = \sqrt{2}$$

۱۶۰۶ - در مثلث  $ABC$  که  $AC > AB$  است نیمساز

داخلی  $AD$  را رسم مینمائیم و فرض میکنیم  $B'$  قرینه محوری  $B$  و  $C'$  قرینه محوری  $C$  نسبت به محور گذرنده بر  $AD$  باشد .  
اولاً ثابت کنید که هر يك از طولهای  $BC'$  و  $CB'$  برابر با تفاضل دو ضلع  $AB$  و  $AC$  میباشد .

ثانیاً اگر اندازه زاویه  $A$  برابر  $60^\circ$  و اندازه زاویه  $B$  برابر  $90^\circ$  باشد ثابت کنید  $D$  نقطه تلاقی سه نیمساز داخلی مثلث  $ACC'$  میباشد .

## کلاس چهارم ریاضی

۱۶۰۷ - حاصل کسر زیر را حساب کنید .

$$\frac{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{2+\sqrt{3}} - \sqrt[4]{2-\sqrt{3}}}$$

(حافظی - دبیر دبیرستان بنیس)



نقطه B عمودی بر AB اخراج میکنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند .

اولاً مکان هندسی نقطه O وسط MC را وقتی که M بر AB حرکت کند بدست آورید .  
ثانیاً محیط چهار ضلعی MBCD را بر حسب a حساب کنید .

(مجله ریاضیات مقدماتی)

### کلاس پنجم طبیعی

۱۶۱۳- اولاً منحنی نمایش هندسی تابع  $y = \frac{1}{2}x^2$  را بوسیله نقطه یابی و خط به معادله  $4y = 3x + 2$  را در یک دستگاه محورهای مختصات روی کاغذ شطرنجی رسم نمائید . خط و منحنی یکدیگر را در دو نقطه A و B قطع میکنند ، مختصات دو نقطه A و B را از روی شکل در نظر گرفته و با آزمایش در هریک از دو معادله طول و عرض A و B را دقیقاً بدست آورید .

ثانیاً اگر  $A(-4 و ۸)$  و  $B(۱ و \frac{1}{2})$  باشد .

الف - تحقیق کنید که زاویه AOB قائمه است .

ب - بجز نقطه O دیگری مانند C روی محور  $x'x$  وجود دارد که زاویه ACB قائمه می باشد ، طول نقطه C را پیدا کنید .

۱۶۱۴- x کمانی است حاده و داریم :

$$\frac{tgx + cotgx}{cosx} = 3$$

خطوط مثلثاتی کمان x را بدست آورید .

### کلاس پنجم ریاضی

۱۶۱۵- با معلوم بودن مختصات سه رأس یک مثلث ، مختصات مرکز دایره محیطی آنرا تعیین کنید .  
مال عددی :

$A(۷ و ۱)$  و  $B(-۳ و -۱)$  و  $C(-۱۹۳)$

۱۶۱۶- سه نقطه زیر داده شده است .

$A(۵ و ۰)$  و  $B(۱ و -۲)$  و  $C(m-۳ و ۲m+۱)$

(۱) تحقیق کنید تفاضل مربعات فواصل نقطه C از دو نقطه A و B برابر با مقدار ثابت است و این مقدار ثابت را بدست آورید .

(۲) از راه محاسبه مقدار m را چنان تعیین کنید که فاصله

C از O مبدأ مختصات می نیمم ( حداقل ممکن ) باشد .

(۳) اگر M وسط AB و D قرینه C نسبت به M باشد

مقدار m را چنان معلوم کنید که عمود منصف CD از مبدأ مختصات بگذرد .

(۴) در حالتیکه C بر محور  $x'x$  واقع است مساحت متوازی الاضلاع ABCD را تعیین کنید .  
تبصره - دوسالیه فوق بدون استفاده از معادله خطوط حل شوند .

۱۶۱۷- x کمان حاده بوده و انتهای کمان y در ربع دوم دایره مثلثاتی واقع است و داریم :

$$\begin{cases} tgx + tgy = \frac{1}{2} \\ cotgx + cotgy = -1 \end{cases}$$

خطوط مثلثاتی دو کمان y و x را تعیین کنید .

۱۶۱۸- معادله زیر مفروض است :

$$4x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$$

بدون حل معادله معلوم کنید که  $x'$  و  $x''$  ریشه های آن میتوانند سینوس و کسینوس یک کمان باشند .

۱۶۱۹- ثابت کنید که اگر دو کمان y و x در یکی از دو

رابطه  $a \sin x \sin y \pm b \cos x \cos y = 0$  (  $a \neq b$  و  $ab \neq 0$  ) صدق کنند، عبارت:

$$E = \frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} + \frac{1}{a \sin^2 y + b \cos^2 y}$$

مستقل از y و x است (E.P.M. Combes)

۱۶۲۰- دو مثلث ABC و  $A'BC$  غیر واقع در یک

صفحه مفروض است ،  $H'$  و  $H$  بترتیب نقطه تلاقی ارتفاعات آنها

می باشند ثابت کنید اگر  $AA'$  بر صفحه ABC عمود باشد،  $HH'$

بر صفحه  $A'BC$  عمود خواهد بود و بالعکس (E.P.M.)

۱۶۲۱- دو خط متناظر و متعامد  $Ax$  و  $Bx$  مفروض

است و  $AB = a$  عمود مشترک آنها میباشد، قطعه خط MP

با طول ثابت  $MP = l$  چنان تغییر مکان میدهد که M همواره

بر  $Ax$  و P همواره بر  $By$  واقع است ( $l > a$ )

(۱) ثابت کنید که اندازه زاویه دو خط AB و MP مقدار

ثابت است .

(۲) مکان هندسی I نقطه وسط MP را تعیین کنید :

(E.P.M.)

### کلاس ششم طبیعی

۱۶۲۲- اولاً منحنی (c) نمایش هندسی تابع

$$y = x^3 + x^2 + 2$$

ثانیاً معلوم کنید که معادله  $x^3 + x^2 + 2 - m = 0$  در

ازاء جميع مقادير  $m$  فقط يك جواب دارد .

ثالثاً معادله مماس بر منحنی (c) را در نقطه تلاقی آن با محور  $y'y$  نوشته و طول نقطه تلاقی این مماس را با  $x'x$  بدست آورید .

رابعاً خط به معادله  $y = 2x + 2$  را در شکل منحنی (c) رسم کرده و معلوم کنید که منحنی (c) از این خط دو پاره خط متساوی جدا میسازد .

۱۶۳۳- بفرض اینکه :

$$y = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + x \quad \text{و} \quad z = 2k'\pi + \frac{\pi}{4} - x \quad \text{باشد}$$

مطلوب است تعیین  $x$  در صورتیکه داشته باشیم :

$$\sin^2 y - \cos^2 z = 1$$

### کلاس ششم ریاضی

۱۶۳۴- دو تابع زیر مفروض است :

$$y = f(x) \quad \text{و} \quad z = \frac{x^2}{f(x)}$$

و فرض میکنیم نمایش هندسی دو تابع  $y$  و  $z$  در صفحه محاورهای مختصات متعامد بترتیب منحنیهای (c) و (c') باشد. خط عمود بر  $Ox$  در نقطه  $H$  به طول  $OH = x (x \neq 0)$  منحنی (c) را در  $M$  و منحنی (c') را در  $M'$  و مماسهای بر منحنیهای (c) و (c') در نقاط  $M$  و  $M'$  محور  $Ox$  را بترتیب در نقاط  $T$  و  $T'$  قطع میکنند .

$$(1) \quad \text{رابطه زیر بدست آورید} \quad \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = \frac{2}{x}$$

(2) اگر نقطه  $M$  معلوم باشد نقطه  $M'$  را از راه ترسیم بدست آورید و با استفاده از رابطه بالا ثابت کنید که تقسیم ( $T'$  و  $T$  و  $O$ ) توافقی است . (E.P.M.)

$$1635- \text{تابع زیر داده شده است} \quad y = \cos \pi / \sqrt{x}$$

(1) معادله مماس بر منحنی نمایش تابع را در نقطه ای از آن به طول يك بدست آورید .

(2) طولهای نقاط تلاقی منحنی را با محور طولها که در فاصله (0.9) واقع اند تعیین کنید .

$$1636- \text{در صفحه محاورهای مختصات متعامد} (Ox, Oy)$$

حاملهای  $\vec{OA}$  و  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  با مفروضات زیر مفروض اند:

$$\begin{cases} \vec{OA} = \vec{AB} = \vec{BC} = 1 \\ (\vec{Ox} \text{ و } \vec{OA}) = \theta \text{ و } (\vec{OA} \text{ و } \vec{AB}) = (\vec{AB} \text{ و } \vec{BC}) = \varphi \\ (0 < \theta < \pi \text{ و } 0 < \varphi < \pi) \end{cases}$$

(1) اگر  $X$  و  $Y$  اندازه های جبری تصاویر  $\vec{OC}$

بر محورهای مختصات باشد مقادیر  $X$  و  $Y$  را بر حسب  $\theta$  و  $\varphi$  بدست آورید .

(2) بازاء چه مقدار از  $\varphi$  خط شکسته  $OABC$  مسدود است؟

(3) بفرض  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  مقدار  $\theta$  را چنان معلوم کنید که

نقطه  $C$  بر محور  $Ox$  و یا بر محور  $Oy$  واقع باشد و در هر دو حال  $OC$  را حساب کنید .

(4) چه رابطه ای باید بین  $\theta$  و  $\varphi$  برقرار باشد برای اینکه نقطه  $C$  بر یکی از نیمسازهای محاورهای مختصات واقع باشد .

(F.P.M.)

۱۶۳۷- ثابت کنید که در هر مبنای  $x > 4$  عددی به شکل

$$44(x-3)(x-3)(x-2)(x-2) \quad \text{وجود دارد که مربع کامل عددی به شکل}$$

(قوام نحوی - دبیر دبیرستانهای اهواز)

۱۶۳۸- کوچکترین عدد چهاررقمی به فرم  $abcc$  را

چنان معلوم کنید که اگر يك واحد از آن کم کنیم عددی به  $aaxx$  و مضرب ۳ بدست آید .

(احمد کهر بائیان - دانشجوی پزشکی مشهد)

۱۶۳۹- شش عدد صحیح متوالی پیدا کنید که کوچکترین

آنها بصورت  $abac$  و مجموع آنها بصورت  $aacbb$  باشد . (مهندس عباس سعیدی)

۱۶۴۰- دایره بر مرکز  $O$  و دو نقطه ثابت  $P$  و  $Q$

مفروض است بطوریکه  $PQ$  از  $O$  میگذرد و  $Q$  و  $P$  نسبت به  $AB$  متقارن نیستند. دو وتر  $AB = AC$  را چنان رسم کنید که  $AC$  بر  $Q$  بگذرد .

۱۶۴۱- بیضی با قطر اطول  $AA'$  و کانونهای  $F$  و  $F'$

مفروض است مماسی متغیر بر این بیضی، مماسهای در نقاط  $A$  و  $A'$  بر آن را بترتیب در نقاط  $T$  و  $T'$  قطع میکند ، ثابت کنید که دایره به قطر  $TT'$  بر کانونهای  $F$  و  $F'$  میگذرد و حاصلضرب  $AT \cdot A'T'$  برابر با مقدار ثابت میباشد . (G.P.B.)

۱۶۴۲- (رقومی) دو نقطه  $a$  و  $b$  به فاصله  $ab = 10$

واقع در صفحه مقایسه مفروض اند .

(1) در صفحه مقایسه نقطه  $s$  را چنان بیابید که طول میانه  $sm$  از مثلث  $sab$  برابر با ۳ و تفاضل مربعات فواصل  $s$  از  $a$  و  $b$  برابر با ۴۰ باشد .

(2) اگر  $s$  تصویر نقطه ای مانند  $S$  واقع در بالای صفحه مقایسه بوده و زاویه  $aSb$  قائمه باشد رقوم  $s$  را از راه ترسیم و از راه محاسبه تعیین کرده مقیاس شیب صفحه  $aSb$  را رسم کنید .



کلیه اعداد سه رقمی است که با آن سه رقم میتوان تشکیل داد)

\*\*\*

## برخی از مسائل تاریخی ریاضی

تنظیم از : مهندس عباس سعیدی

۱۶۴۰ - اتحاد لاگرانژ

$$1) (a^x + b^x)(a'^x + b'^x) - (aa' + bb')^x \equiv$$

$$(ab' - a'b)^x$$

$$2) (a^x + b^x + c^x)(a'^x + b'^x + c'^x) - (aa' + bb' + cc')^x \equiv$$

$$\equiv (ab' - ba')^x + (bc' - cb')^x + (ca' - ac')^x$$

۱۶۴۱ - نامساوی برنولی؛ هرگاه مقادیر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  و  $x_n > 0$  همعلامت و بزرگتر از ۱ - باشند ثابت کنید

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) > 1+x_1+x_2+\dots+x_n$$

۱۶۴۲ - مسئله حساب از فیبوناچی؛ عددی پیدا کنید که اگر آن را به یک مربع کامل اضافه کنیم و یا از آن کم کنیم در هر دو حالت حاصل مربع کامل باشد

$$\begin{cases} x^2 + a = y^2 \\ x^2 - a = z^2 \end{cases}$$

۱۶۴۳ - مسئله حساب از تبولت؛ عددی بصورت  $\overline{aabb}$  در مبنای اعشاری چنان پیدا کنید که اگر یک واحد بر آن اضافه کنیم یک عدد مربع کامل بدست آید

۱۶۴۴ - مسئله از : کاتالان؛ عبارت زیر را به حاصل ضرب دوچند جمله ای کامل تجزیه کنید

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)^p - x^n$$

۱۶۴۵ - مسئله از : هرمیت؛ اگر عبارت  $f(xy)$  نسبت به  $xy$  متقارن و بر  $x-y$  بخش پذیر باشد بر  $(x-y)^2$  نیز بخش پذیر خواهد بود

۱۶۴۶ - مسئله از کاتالان؛ عبارت زیر را خلاصه کنید

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + (x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$$

۱۶۴۷ - مسئله از فرما؛ اگر  $p$  یک عدد اول و  $a$  عدد متباین باشد ثابت کنید  $a^{p-1} - 1$  بر  $p$  بخش پذیر است

۱۶۴۸ - مسئله از برنولی؛ چندجمله ای  $ax$  بصورت  $f(x)$  از درجه  $p$  چنان تشکیل دهید که داشته باشیم:

$$f(x) - f(x-1) = x^p \text{ و بازاء } x=0 \text{ برابر صفر گردد}$$

مورد استعمال - محاسبه مجموع قوای مشابه  $n$  عدد

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

## مسائل متفرقه

۱۶۳۳ - دودایره بامرکزهای  $O$  و  $O'$  و باشعاعهای  $R$  و  $R'$  مفروض اند، نقطه  $M$  را در خارج دودایره چنان انتخاب کنید که اگر  $A$  نقطه تلاقی  $MO$  با دایره  $BO$  نقطه تلاقی  $MO'$  با دایره  $O'$  باشد مثلث  $MAB$  متساوی الاضلاع باشد.

(حسن یوسفی آذری نژاد - دانشجوی ریاضی دانشکده علوم)

۱۶۳۴ - مثلث  $ABC$  مفروض است، نقطه  $M$  را بر ضلع  $BC$  چنان تعیین کنید که داشته باشیم.

$$1) \frac{MB}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$2) \frac{MB}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$3) \frac{MB}{MC} = \frac{AB^n}{AC^n}$$

(خسرو جهانپار - ششم ریاضی دبیرستان شمس العلماء)

۱۶۳۵ - نامساوی زیر را برای هر مثلث ثابت کنید.

$$\frac{h_a}{r_a} + \frac{h_b}{r_b} + \frac{h_c}{r_c} > 3$$

(سیروس فخریاسری - دانشجوی دانشکده فنی)

۱۶۳۶ - با استفاده از روش استقرار ریاضی نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times \dots \times n^2 \geq n^n$$

فرستنده : (مهندس عباس سعیدی)

\*\*\*

سه مسئله از مسائل ارسالی توسط : ایرج ادیبی

۱۶۳۷ - ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه، بفرض اینکه

طولهای ضلاع اعداد صحیح باشند مجموع وتر و یک ضلع مجاور به زاویه قائمه و همچنین تفاضل آنها مربع کامل و نصف مجموع وتر و ضلع دیگر نیز مربع کامل میباشد.

مثال برای مثلثی که اضلاع آن برابر با اعداد ۳ و ۴ و ۵ است.

$$5 + 4 = 9 = 3^2 \text{ و } 5 - 4 = 1 = 1^2 \text{ و } \frac{5+3}{2} = 4 = 2^2$$

آیا مجموع وتر و ضلع اول همواره یک عدد فرد است؟

آیا نصف مجموع وتر و ضلع دیگر همواره یک عدد زوج است؟

۱۶۳۸ - ثابت کنید دو عدد متوالی که مجموع آنها برابر

بامربع یک عدد فرد باشد با این عدد فرد تشکیل اضلاع مثلث قائم الزاویه ای را میدهند

مثلاً داریم  $5^2 = 12 + 13$  و اعداد ۱۲ و ۱۳ اندازه

های اضلاع یک مثلث قائم الزاویه میباشد

۱۶۳۹ - ثابت کنید سه رقم مختلف نمیتوان یافت که

ترکیبات مختلف آن عدد اول باشد ( ترکیبات مختلف سه رقم

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} & x_1(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) & = a^y \\ & x_2(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) & = \xi a^y \\ & x_r(yx_1 + yx_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + yx_n) & = a^y \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\
& \left\{ \begin{aligned} & x_n[ynx_1 + yn x_2 + yn x_3 + yn x_4 + \dots + (y n - 1)x_n] = n^y a^y \\ & x_1(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) - y(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + 1 & = \dots \\ & x_2(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) - \xi(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + 1 & = \dots \\ & x_r(yx_1 + yx_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + yx_n) - y(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + 1 & = \dots \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\
& \left\{ \begin{aligned} & x_r[ynx_1 + yn x_2 + yn x_3 + yn x_4 + \dots + (y n - 1)x_n] - yn(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)n + 1 = \dots \\ & x_1(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) & = \dots \\ & x_2(yx_1 + x_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + yx_n) + y(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) & = -1 \\ & x_r(yx_1 + yx_2 + x_3 + yx_4 + \dots + yx_n) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) & = -1\lambda \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\
& \left\{ \begin{aligned} & x_n(yx_1 + yx_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + x_n) + y(n-1)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = -(n-1)^y \\ & x_1(x_1 + yx_1 + yx_2 + \dots + yx_n) & = a^y \\ & x_2(yx_1 + x_2 + yx_3 + \dots + yx_n) + y(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) & = \xi a^y \\ & x_r(yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^y & = a^y \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\
& \left\{ \begin{aligned} & x_n(yx_1 + yx_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + x_n) + \xi \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^y = n^y a^y \\ & x_1(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^y & = a^y \\ & x_2(yx_1 + x_2 + x_3 + yx_4 + yx_n) + y\xi(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^y & = y \circ a^y \\ & x_r(yx_1 + yx_2 + x_3 + yx_4 + \dots + yx_n) + \xi \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^y & = \xi a^y \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\
& \left\{ \begin{aligned} & x_n(yx_1 + yx_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + x_n) + \xi n(n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^y = (yn+1)^y a^y \\ & x_1(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) & = \dots \\ & x_2(yx_1 + x_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + yx_n) + y(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) & = -1 \\ & x_r(yx_1 + yx_2 + x_3 + yx_4 + \dots + yx_n) + \xi(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) & = -\xi \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\
& \left\{ \begin{aligned} & x_n(yx_1 + yx_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + x_n) + y(n-1)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = -(n-1)^y \\ & x_1(x_1 + yx_1 + yx_2 + yx_3 + \dots + yx_n) & = \dots \\ & x_2(yx_1 + x_2 + yx_3 + yx_4 + \dots + yx_n) + y(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) & = -1 \\ & x_r(yx_1 + yx_2 + x_3 + yx_4 + \dots + yx_n) + \xi(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) & = -\xi \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$



۱۶۵۰- معادله درجه پنجم :  $x^5 - 5b^2x^3 + 5b^4x = 2a^5 - 0$  را بفرض اینکه بدانیم  $a > b$  است و معادله فقط

يك ریشه حقیقی دارد حل کنید .

۱۶۵۱- دو مقطع مخروطی در يك كانون مشترك اند، نقاط تقاطع و مماسهای مشترك منحنیها را تعیین کنید .

۱۶۵۲- نقاط تقاطع و مماسهای مشترك دایره را که مرکز آن بر محور اطول مقطع مخروطی است با این مقطع

مخروطی معلوم کنید .

۱۶۵۳- دو نقطه B و A در سطح دایره معلوم O بشعاع R قرار دارند. قطر متنی PQ را در دایره رسم کرده و خطوط

PA و PB و QA و QB را رسم می کنیم تا با تقاطع باهم نقاط M و N را بدست دهند .

(۱) خط MN قطر PQ را در نقطه S قطع کند مطلوبست مکان هندسی این نقطه

(۲) مکان هندسی نقطه T وسط قطعه خط MN را تعیین کنید .

(۳) مکان هندسی نقاط M و N يك منحنی درجه چهارم است در دو حالت این منحنی بدو دایره منطبق بر هم (يك دایره) -

مضاعف) تبدیل میشود این دو حالت را تعیین کنید .

۱۶۵۴- بنا بر تعمیم تعریف دوعدد را که قدر مطلق اختلاف آنها برابر واحد است متوالی می نامیم ( تعمیم تعریف اعداد

متوالی در عددهای صحیح). ظل مثلثاتی زوایای مثلثی اعداد متوالی می باشند ثابت کنید که این اعداد اعداد صحیح اند و یکی از زوایای

مثلث  $45^\circ$  درجه می باشد. همچنین ظل تمام نیم زوایای مثلثی اعداد متوالی می باشند ثابت کنید که این اعداد اعداد صحیح اند و مثلث

قائم الزویه است .

۱۶۵۵- فصل مشترك دو مقطع مخروطی که قطرهای اطول آنها بريك امتداد واقع اند تعیین کنید .

۱۶۵۶- در چهارضلعی ABCD رؤوس B و A دو نقطه ثابت از صفحه می باشند اضلاع AD و BC با هم برابر بوده و طول

ثابتی دارند و زاویه آنها همواره برابر مقدار ثابت  $\alpha$  باقی میماند مکان هندسی نقطه M وسط ضلع CD را تعیین کنید آیا ممکن است

این چهارضلعی دوزنقه محاطی گردد ؟ در صورتیکه این امر همواره میسر نیست شرط امکان را تعیین کنید .

بطور کلی اگر در چهارضلعی ABCD رؤوس B و A دو نقطه ثابت بوده و طول اضلاع AD و BC و زاویه آنها با هم همواره

ثابت مانده و تغییر نکنند مکان هندسی نقطه M وسط CD را تعیین کنید .

## بازی اعداد

مسئله منسوب به شیخ بهائی

عددی در نظر بگیرید که از ۱۰۵ کمتر باشد . عدد مزبور را بر ۳ تقسیم نموده و مانده اگر يك شد عدد ۷۰ و اگر ۲ شد عدد ۳۵ را یادداشت نمایید . مجدداً عدد اصلی را بر ۵ تقسیم نموده و مانده را در ۲۱ ضرب کرده و حاصل را یادداشت نمایید . دفعه سوم عدد اصلی را بر ۷ تقسیم کرده مانده را در ۱۵ ضرب نموده حاصل را یادداشت کنید . سه عددی که یادداشت کرده اید با هم جمع کنید ، اگر مجموع از ۱۰۵ بیشتر شد تفاضل آن بر ۱۰۵ و اگر مجموع از ۱۰۵ کمتر شد خود عدد اصلی میباشد .

فرستنده : قوام نجوی

## دانش آموز رتبه اول امتحانات نهائی



آقای بایرام مکارکه

در امتحانات ششم طبیعی خرداد ۴۳ بین دانش آموزان دبیرستان درخشانی بنیس با معدل ۱۵٫۷۴ حائز رتبه اول شده است به سال ۱۳۲۳ در طسوج تولد یافته و همواره از لحاظ درس و اخلاق شاگرد ممتاز بوده است .

رئیس دبیرستان درخشانی بنیس - رحیمی

## برای دانشجویان

۱۶۵۷ - (۱) دایره‌ای بمرکز  $O$  مبدأ مختصات در دست است بر روی شعاع حامل نقطه  $P$  بر روی دایره نقطه  $M$  را چنان

تعیین کنید که مماس بر منحنی مکان  $M$  موازی مماس نقطه  $Q$  بر دایره باشد در صورتیکه بدانیم زاویه  $\angle QOP$  برابر مقدار ثابتی مانند  $\alpha$  میباشد (۲) - ثابت کنید که برای هر مارپیچ لگاریتمی دایره‌ای میتوان یافت که مماسهای مارپیچ موازی مماسهای این دایره باشد و از این روتعریف مارپیچ لگاریتمی را انطباق دهید.

۱۶۵۸ - (۱) - مرغانه (Oualè) دکارت منحنی است که ترکیب خطی از فواصل هر نقطه از آن از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$

بنام کانون مقدار ثابتی باشد یعنی اگر  $M$  نقطه‌ای از مرغانه باشد  $kMF + k'MF' = a$  که در آن  $k$  و  $k'$  اعداد ثابت و  $a$  طول ثابتی است (فاصله  $FF' = 2c$  می‌باشد) (مثلاً اگر  $k = \pm k' = 1$  باشد مرغانه به بیضی یا هذلولی تبدیل میشود) شکل کلی مرغانه دکارت را بر حسب  $k$  و  $k'$  بحث کنید.

(۲) - ثابت کنید که مرغانه کانونی مانند  $F$  دارد که ترکیب‌های خطی مانند  $h_1MF' + h_2MF'' = l_1hMF + l_2h'MF'' = l$

نیز ثابت میمانند  $h_1, h_2, l_1, l_2$  را از روی  $k$  و  $k'$  و  $a$  بدست آورید ( $F''$  بر روی خط  $FF'$  واقع است)

۱۶۵۹ - (۱) - ثابت کنید که مسیر نقطه‌ای در تحت اثر قوه جاذبه متناسب با عکس مکعب فاصله با تبدیل  $Z = z^3$  بصورت

$R^k = AX + BY$  می‌باشد که در آن  $z = x + iy$  و  $Z = X + iY$  فرض شده است. اگر جرم نقطه واحد و ضریب مطلق جذب

برای قوه مؤثر برابر  $H$  باشد مقادیر  $h$  و  $k$  را از روی  $H$  بدست آورید (سرعت سطحی اولیه حرکت برابر  $C$  می‌باشد) (مسیر دارای سه پارامتر است یعنی  $A$  و  $B$  دو پارامتر آشکار و  $k$  پارامتر است که به  $C$  نیز بستگی دارد)

(۲) - اگر قوه متناسب با عکس فاصله قوه دافعه باشد آیا برای مسیر حرکت میتوان صورت ساده‌ای مانند قسمت اول بدست آورد؟

۱۶۶۰ - معادله  $x^6 - 5b^2x^2 + 5b^4x - 2a^6 = 0$  را حل کنید. بفرض  $a > b$  ثابت کنید که معادله فقط يك ریشه حقیقی

دارد و بفرض  $a < b$  ثابت کنید که جمیع ریشه‌های معادله حقیقی است. اگر  $a = b$  باشد ریشه‌های حقیقی از يك ریشه ساده و دوریشه مضاعف تشکیل میشوند.

۱۶۶۱ - دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$x_1(x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n) = a^2$$

$$16x_2(2x_1 - 14x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_n) + 10(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = 16a^2$$

$$81x_3(2x_1 + 2x_2 - 79x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_n) + 80(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = 81a^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n^4x_n[2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots - (n^4 - 2)x_n] + (n^4 - 1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = n^4a^2$$

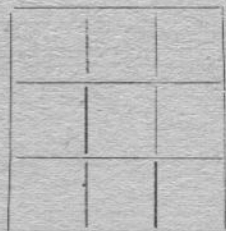
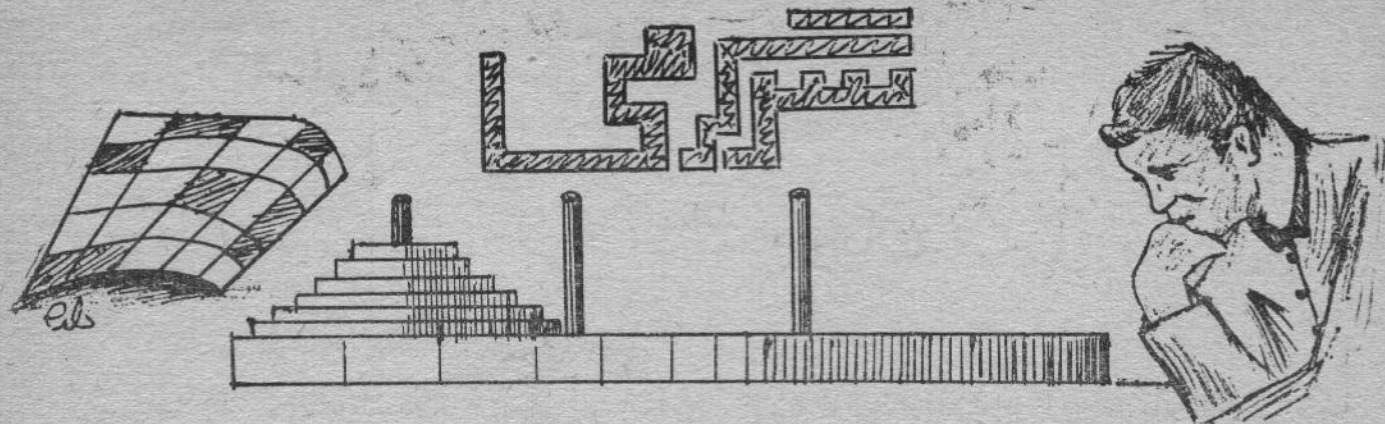
ثابت کنید که اگر  $n$  نسبت به بی نهایت میل کند دستگاه متقارب است یعنی مقادیر  $x_n$  سلسله مقاربی تشکیل میدهند. در این

صورت حد  $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$  را وقتی  $n$  نسبت بی نهایت میل می کند تعیین کنید.

ثابت کنید که تعداد جمل منفی اگر نامحدود باشد تعداد جمل مثبت محدود است و برعکس. بستگی این امر را با علامت حد  $S_n$

معین کنید، تعداد جمل مثبت یا منفی محدود را معلوم کنید.





در نظریه گیریم  $a^m b^n$

که اگر  $m$  و  $n$  مقادیر صفر و ۱ را با ترتیب‌های مختلف قبول کنند. نه جمله حاصل میشود، این نه جمله را در خانه‌های جدول بالا چنان قرار دهید که حاصل ضرب سه جمله واقع در هر سطر یا هر ستون و یا هر قطر برابر با مقدار ثابت باشد و این مقدار ثابت را تعیین کنید.

### بازی اعداد

دو عدد دورقمی چنان تعیین کنید که اگر هر دو را با هم مقلوب نمائیم حاصل ضرب آنها تغییر نکند، همه جوابها را بدست آورید.

مثال  $12 \times 42 = 21 \times 24$

### نوشتن اعداد با یک رقمی

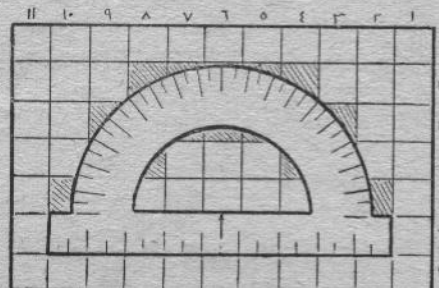
با پنج رقم ۲ (نه بیشتر و نه کمتر) اعداد از ۱ تا ۲۵ را بنویسید

مثال:  $1 = 2 + 2 - 2 - \frac{2}{2}$

$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2$

$3 = 2 + 2 - 2 + \frac{2}{2}$

$4 = 2 \times 2 \times 2 - 2 - 2$



### جدول کلمات متقاطع

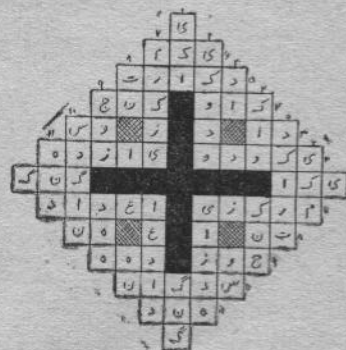
تاکنون جدول های بسیار از دانش آموزان دریافت شده است. اما بعلمت اینکه مطالب آنها منحصر آدر باره ریاضات نبوده از چاپ آنها خوداری شده است.

**افقی:** ۱- ریاضیدان بزرگ ایرانی که از جمله کارهایش وضع کسرهاست. ۲- بعد از حرف اولش ی اضافه شود نام قاعده ای است که معلوم میکند در معادله مثلثاتی چه خطی را باید مجهول معاون اختیار نمود. آخرش قبل از اول بیاید از دوران دایره حول قطرش پدید میآید. ۳- رسمی که ثلث آن کشیده نشده است. معکوس دوسوم از یک دوم. ۴- خیام را به پرستش از آن مشهور ساخته اند. طول کروی در مختصات افقی. خودش اول است اما سمت راست هر عدد واقع شود، آن عدد غیر اول است. ۵- اصلش هندی و جیا بوده است که در فارسی حبیب و در اروپا چنین شده است. ۷- آخرش را غیر ملفوظ بگیرید در هر مثلث بر اواسط اضلاع، پای ارتفاعات، و اواسط پاره خطهایی که رأسها را به نقطه تلاقی ارتفاعات وصل میکنند میگذرد.

**قائم:** ۱- رشته ای از ریاضیات جدید. ۲- در ابتدا راهزنی میکرد و بعد از جمله ریاضیدانان دربار مأهون شده است و صاحب سه پسر ریاضیدان بوده است. ۳- چون پهلوی نصفش واقع شود مربع گردد. ۵- اگر سمت راستش تکرار شود ده برابر گردد و چون این رقم حذف شود ۲۷ واحد کم شود. ۶- ضمیر شخصی و واحد وزن. ۷- ضمیر شخصی و نصف از قوه. ۹- واحد سطح. ۱۰- بزرگترین عدد سه رقمی مربع کامل شامل رقم بیمنی. ۱۱- تابعی که در ازاء هر مقدار از متغیر برای آن به تعداد محدود مقادیر بدست میآید.

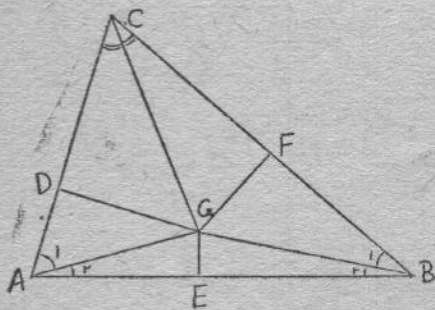
### حل مسأله صفحه سر گرمی شماره ۷

از کیسه اول یک سکه. از کیسه دوم دو سکه... و بالاخره از کیسه  $n$  ام  $n$  سکه برداشته وزن مجموع آنها را تعیین میکنیم، وزن مجموع برابر با: 
$$K = \frac{n(n+1)}{2} A - KB$$
 اگر  $K = 1$  باشد کیسه اول، اگر  $K = 2$  باشد کیسه دوم... و بالاخره اگر  $K = n$  باشد کیسه  $n$  ام شامل سکه های  $B$  گرمی است.



# اشتباه در چیست؟

است که حاده، قائمه یا منفرجه باشد. نیمساز داخلی زاویه C و عمود

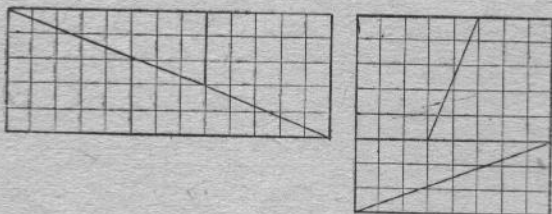


منصف ضلع AB را  
رسم می کنیم که یکدیگر  
را در نقطه G قطع می-  
کنند. خطوط GA و  
GB و عمودهای GD  
و GF را به ترتیب بر  
AC و BC رسم می-  
کنیم. از خاصیت عمود  
منصف نتیجه میشود که

(۱)  $GA = GB$  و از خاصیت نیمساز نتیجه میشود که  
(۲)  $GD = GF$  و از تساویهای (۱) و (۲) برمی آید که دو مثلث  
قائم الزاویه GAD و GBF متساوی باشند (در حالت وترو  
یک ضلع) و از آنجا نتیجه میشود که دوزاویه  $A_1$  و  $B_1$  باهم  
مساوی باشند و چون دوزاویه  $A_2$  و  $B_2$  نیز متساویند (مثلث  
متساوی الساقین GAB) پس لازم می آید که  $A_1 + A_2$  یعنی  
تمام زاویه A با  $B_1 + B_2$  یعنی تمام زاویه B مساوی باشد،  
آیا هر مثلثی متساوی الساقین است؟ آیا هر دوزاویه از هر نوع  
بایکدیگر مساویند؟ اگر نه، اشتباه در چیست؟

\*\*\*

۵- مربعی به ضلع ۸ واحد رسم نموده آن را به  $8 \times 8 = 64$   
خانه متساوی جدول بندی مینمائیم. این مربع را مطابق شکل  
به دو دوزنقه قائم (با قاعده های ۵ و ۳ و ساق قائم ۳) و دو



مثلث قائم الزاویه (با قاعده ۳ و ارتفاع ۸) تقسیم نموده و این  
چهاربخش را مجزا نموده پهلوی هم چنان قرار می دهیم تا مطابق  
شکل یک مربع مستطیل  $5 \times 13 = 65$  واحد سطح تشکیل  
شود. مساحت مربع مستطیل با مساحت مربع مساویست در این  
صورت آیا  $8 \times 8 = 64$ ؟ این نتیجه که درست نیست، پس اشتباه  
در چیست؟

۱- می دانید که یک من برابر است با ۳ کیلو. بنابراین  
می توانیم بنویسیم:

$$(۱) \quad ۶ = ۲ \text{ من}$$

$$(۲) \quad ۱۵ = ۱ \text{ من}$$

از طرفی می دانیم که اگر دو مقدار متساوی را در دو چیز  
متساوی ضرب کنیم حاصلها برابر است. بنابراین دوطرف رابطه  
(۱) را در دوطرف رابطه (۲) ضرب می کنیم، می شود:

$$۹ = ۱ \text{ من}$$

این نتیجه که درست نیست، پس اشتباه در کجاست؟

\*\*\*

۲- می دانید که واحد پول در آمریکا دلار است. هر دلار

برابر ۱۰۰ سنت است. پس می توانیم بنویسیم:

$$\text{سنت } ۲۵ = \frac{۱}{۴} \text{ دلار}$$

از دوطرف این تساوی جذر می گیریم، می شود:

$$\sqrt{\frac{۱}{۴} \text{ دلار}} = \sqrt{\text{سنت } ۲۵}$$

$$\frac{۱}{۲} \text{ دلار} = ۵ \text{ سنت}$$

یا

در صورتی که می دانیم  $\frac{۱}{۲}$  دلار برابر ۵۰ سنت است، پس اشتباه

در کجاست؟

\*\*\*

۳- فرض کنید که a و b دو عدد متساوی و مخالف صفراوند.

بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

یا از ضرب دوطرف در a:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

یا با تفریق کردن  $b^2$  از دوطرف:

$$(a-b)(a+b) = b(a-b)$$

یا

$$a+b = b$$

یا با تقسیم کردن دوطرف بر  $a-b$ :

حال اگر بگیریم:  $a = b = ۱$ ، از تساوی آخر نتیجه

می شود:  $۲ = ۱$ . اگر در عملیات اشتباه نشده است پس این

نتیجه عجیب چیست؟

\*\*\*

۴- مثلث ABC را که در آن  $AC < BC$  (در نتیجه زاویه

A بزرگتر از زاویه B است) در نظر می گیریم. زاویه A ممکن

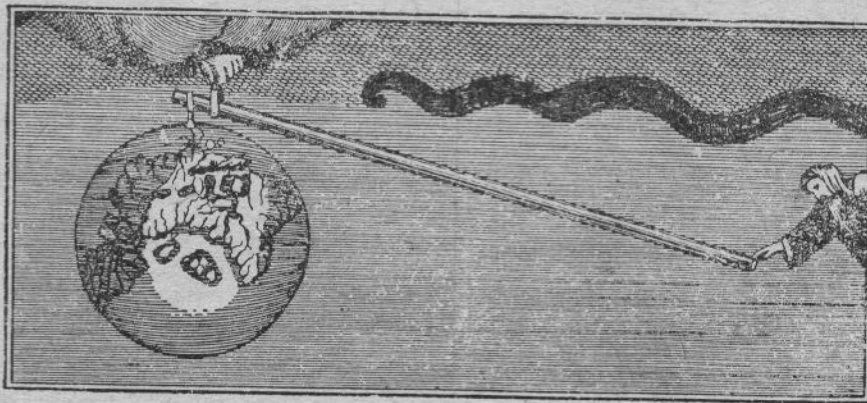


آیا ارشید سهرگزمیتوانست زمین را بلند کند؟

Physics for Entertainment ترجمہ از کتاب

توسط: محمد رضا قسیمي دانش آموز سال پنجم ریاضی دبیرستان دارالفنون

گرمی را بطور  
مستقیم از سطح  
زمین بلند کند ،  
اگر او بخواهد  
وزنه‌ای را که  
باندازهٔ کرهٔ زمین  
جرم دارد بلند  
کند ، به اهرمی  
احتیاج خواهد داشت  
که طول بازوی کارگر



« يك نقطه اثناء  
بمن بدھيد من زمين  
را بلند خواهم كرد »  
اين گفته است كه به  
ارشميدس يا نايه ای  
كه قانون اهرمها را  
كشف كرد نسبت  
میدهند .  
« اگر زمین دیگری

آن : ..... , ..... , ..... , ..... , .....

مرتبه بزرگتر از طول بازوی ایستادگیش باشد .  
شما می‌توانید بسادگی حساب کنید که اگر انتهای  
بازوی کوتاه‌تر ( بازوی مقاوم ) باندازه ۱ سانتیمتر  
بالا رود انتهای دیگر اهرم یعنی انتهای بازوی کارگر قوسی  
باندازه :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1

کیلومتر طی می کند یعنی این فاصله را ارشمیدس برای فشار وارد آوردن به اهرم بایستی می پیمود تا اهرم کره زمین را باندازه یک سانتیمتر ، فقط یک سانتیمتر ، بلند کند ، و اما پیمودن این فاصله چه مدت زمان طول می کشید ؟

فرض کنیم که ارشمیدس می توانست ۶۰ کیلوگرم را در یک ثانیه ، یک متر بلند کند . بنابراین برای بلند کردن توده زمین باندازه فقط یک سانتیمتر زمانی برابر

1, . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . . , . . .

ثانیه دہ

३. , . . . , . . . , . . . , . . .

سال لازم داشت. ملاحظه می شود که این زمانی است فوق العاده طولانی و ارشمیدس وسیله ای که بکمک آن این زمان را بمقدار قابل توجهی کوتاه کند، در اختیار نداشت از این گذشته بفرض اینکه ارشمیدس قادر بود که اهرم را با سرعت نور یعنی ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه حرکت دهد برای بلند کردن توده زمین باندازه یک سانتیمتر، ده میلیون سال وقت لازم داشت. آیا اگر جای پای هم به ارشمیدس داده می شد او می توانست زمین را بلند کند؟

وجود داشت من به آنجا می رفتم و سیاره خودمان را بلند میکردم.»

**ارشمیدس** میدانست که با نیروئی ضعیف می توان وزنۀ سنگینی را با استفاده از يك اهرم بلند کرد . کافی است که این نیروی کم به انتهای بازوی کارگر وارد آید و سبب حرکت نیروی مقاوم که در انتهای بازوی ایستادگی قرار دارد ، گردد . بنابراین ارشمیدس تصور میکرد که با فشار وارد آوردن به بازوی يك اهرم خیلی طویل قادر خواهد بود وزنه ای را که جرم آن معادل جرم کرۀ زمین است بلند کند .

برای ساده شدن موضوع فرض کنیم که منظور از بلند کردن زمین یعنی آنکه وزنه‌ای را که جرمش باندازه جرم کره زمین باشد از روی سطح کره زمین بلند کرد.

بدون شك اگر ارشمیدس از توده عظیم زمین اطلاع داشت هرگز چنین سخنی نمیگفت . حال فرض کنیم که ارشمیدس روی سیاره دیگری قرارداد داشت و اهرم دراز مورد لزوم در اختیارش بود . آیا می توانید حدس بزنید که چه زمانی طول میکشد تا ارشمیدس زمین را فقط يك سانتیمتر بلند کند ؟

**سی میلیون سال .....۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ حتماً تعجب**

**کرده اید ؟ پس اجازه بدهید که با یک حساب ساده درستی این عدد را ثابت کنیم :**

اگر وزنه‌ای با اندازه کره زمین در روی سطح زمین قرار داشت با حسابی که کرده‌اند این وزنه با اندازه :  
..... , ..... , ..... , ..... , ..... تن وزن خواهد داشت .

حال فرض می‌کنیم که یکنفر بتواند يك وزنه ۶۰ كيلو-

# اصطلاحات ریاضی و معادل انگلیسی آنها

تنظیم از: ایرج ارشاقی

|                      |                            |                  |                      |
|----------------------|----------------------------|------------------|----------------------|
| Ratio                | نسبت                       | Fraction         | کسر - برخه           |
| Proportion           | تناسب                      | Vulgar Fraction  | کسر متعارفی          |
| Extremes             | دو طرف تناسب               | Decimal Fraction | کسر اعشاری           |
| Means                | دو وسط تناسب               | Numerator        | صورت کسر - برخه شمار |
| Reduce               | تحویل کردن - ساده کردن     | Denominator      | مخرج کسر - برخه نام  |
| Equivalent Fractions | کسرهای متساوی              | Slanting Line    | خط کسری              |
| Lowest term          | ساده ترین شکل - ساده نشدنی | Proper Fraction  | کسر کوچکتر از واحد   |
|                      |                            | Mixed number     | عدد کسری             |

$$\text{Two and one third} = 2\frac{1}{3}$$

$$\text{One - half plus Five Sixth} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$$

$$\text{Four tenth minus two point three five} = 0.4 - 2.35$$

$$\text{Point nought one eight} = 0.018$$

## Problems

- Express  $17\frac{3}{4}$  as an improper Fraction (تجنیس کنید)
- Express  $\frac{59}{8}$  as a Mixed number . (رفع کنید)
- Reduce  $\frac{768}{2592}$  to its lowest term . (به ساده ترین شکل برآورید)
- Reduce  $\frac{5}{6}$  to an equivalent fraction, whose denominator is 3 units more than its numerator .
- A can do a piece of work in 6 days, B in 8 days, and C in 9 days ; in how many days would all three working together finish it ?
- Express the following decimals as vulgar fractions, and reduce the fractions to their lowest terms :

0.0052

2.0725



# پرسش و پاسخ

بعضی از خوانندگان مجله سؤالاتی برای مامی فرستند که به آنها پاسخ دهیم . از این اظهار لطف و علاقمندی خوانندگان بی اندازه سپاسگزاریم . از این شماره به بعد سعی خواهیم کرد که به سؤالاتی رسیده تا آنجا که مقدورمان است پاسخ دهیم . نهایت از سؤالات کنندگان محترم تقاضا داریم که در موقع ارسال سؤال حدود معلومات خود را نیز معین کنند که پاسخ مناسب با آن باشد و احیاناً پاسخی در سطح پایین داده نشود که قانع کننده نباشد .

## اینک چند سؤال و جواب آنها :

**سؤال :** بزرگترین عدد اولی که تا کنون شناخته شده

است چیست ؟

کوروش پازوکی

**جواب :** تا آنجا که ما اطلاع داریم ، بزرگترین دو

عدد متوالی اولی که تا سال ۱۹۵۰ شناخته شده بودند عبارتند از :

$$2,305,843,009,213,693,951$$

که معادل است با :  $2^{21} - 1$  و

$$2,305,843,009,213,693,967$$

که معادل است با :  $2^{21} + 15$  .

از اینکه از سال ۱۹۵۰ به این طرف عدد اولی بزرگتر از این شناخته شده باشد اطلاعی نداریم . خواهشمندیم که اگر خوانندگان اطلاعی در این خصوص دارند ، آن را برای ما جهت درج در مجله و آگاهی عموم بفرستند .

ضمناً بد نیست که بدانید که به وسیله ماشین آی ، بی ، ام ۷۰۴ ، شش میلیون از نخستین اعداد اول محاسبه شده است و جدولی برای آنها تهیه و چاپ کرده اند . اولین عدد اول در این جدول ۱ و آخرین آن ۱۰۴,۳۹۵,۲۸۹ است .

\*\*\*

**سؤال :** نظریه فعلی دانشمندان در جنسیت نور چیست ؟

آیا نور از ذرات مادی به نام فوتون تشکیل یافته است . در این صورت طبق فرمول زیر آیا جرمشان بی نهایت است ؟ ( زیرا که با سرعت نور حرکت می کنند )

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(حق نواز)

**جواب :** دانشمندان برای فوتون جرم در نظر نمی گیرند

بلکه فوتون را واحد انرژی می دانند . فرمولی که مرقوم داشته اید برای ذراتی نظیر الکترون یا پروتون یا نوترون

صادق است که اگر سرعتشان خیلی زیاد شده به سمت سرعت سیر نور میل کند ، جرمشان نسبت به جرم در حال سکون خیلی زیاد می شود .

\*\*\*

**سؤال :** آیا سرعت نور در اثر عبور از جو کم می شود ؟

(خلیل فضل الهی)

**جواب :** سرعت سیر نور در هر محیط شفاف از این فرمول

$$V = \frac{c}{n}$$

که در آن  $c$  سرعت سیر نور در خلاء (معادل  $3 \times 10^{10}$  کیلومتر در ثانیه) و  $n$  ضریب شکست آن محیط است . ضریب شکست هوا برای نور مرئی در حدود  $1.000273$  است . بنابراین سرعت سیر نور در هوا کمتر از سرعت سیر آن در خلاء است .

\*\*\*

**سؤال :** ۱ - حلزون پاسکال چیست ؟ ۲ - فرمول

محیط بیضی چه می باشد . آنرا چگونه بدست می آورند ؟

(هوشنگ رستمیان)

**جواب :** ۱ - حلزون پاسکال یکی از کونکوئیدهای

دایره است . کونکوئید دایره مکان هندسی نقاطی است که از یک نقطه ثابت به هر یک از نقاط آن دایره وصل کرده از آن نقطه دایره بر روی این امتداد دو طول متساوی وثابت در دو جهت جدا کنیم .

۲ - محیط بیضی مانند محیط بعضی از اشکال هندسی نظیر

دایره نیست که اندازه آن از روی فرمولی بر حسب یکی از اجزایش ، به دست آید . به طور کلی برای محاسبه طول قوسی از یک منحنی که معادله آن در دست باشد ، در ریاضیات عالی ، راهی وجود دارد که همان استفاده از انتگرال گیری است . نهایت در مورد بیضی ، انتگرالی که به دست می آید ، انتگرال بیضی است که برای محاسبه آن جدولهای مخصوصی ترتیب داده اند .

**سؤال ۱:** آیا ممکن است که در فاصله دو عدد  $K$  و  $2K$  عدد اولی وجود نداشته باشد؟ ۲- آیا می شود تعیین کرد که در هر طبقه از اعداد حداقل چند عدد اول موجود است؟  
(عزیز صفائی)

**جواب ۱:** - به تجربه ثابت شده است که همواره بین دو عدد  $K$  و  $2K$  اقلایك عدد اول وجود دارد.  
ضمناً این را نیز بدانید که می توان ثابت کرد که همواره  $n$  عدد متوالی وجود دارد که هیچیک عدد اول نیستند. این دو مطلب به ظاهر متعارض می رسند، اما در حقیقت متعارض نیستند. چه آخرین عدد از  $n$  عدد متوالی دو برابر عدد نخستین نیست. ۲- توابعی هستند که به تقریب تعداد اعداد اول را بین دو طبقه از اعداد به دست می دهند. ابتدائی ترین این توابع به اسم «لکاربتم انتگرال» معروف است و آن:

$$\int_n^{n+k} \frac{dx}{\ln x}$$

می باشد (البته به شرطی که  $n$  و  $n+k$  بزرگ باشند).

**سؤال ۱:** دایره نه نقطه موسوم به دایره اولر است یا دایره «فوری باخ»؟ ۲- آیا مرکز ثقل نیم دایره نقطه مشخصی است یا نه؟  
(شاهرخ طاهری آشتیانی)

**جواب ۱:** دایره نه نقطه به اسم هر دو معروف است. ۲- معلوم نکردید، آیا مرکز ثقل محیط نیم دایره منظور شماست یا مرکز ثقل سطح نیم دایره. به هر حال مرکز ثقل هر کدام که منظور شما باشد، نقطه مشخصی است بر روی محور تقارن شکل و فاصله آن از مرکز نیم دایره در مورد مرکز ثقل محیط  $\frac{2R}{\pi}$  و در مورد مرکز ثقل سطح  $\frac{4R}{3\pi}$  می باشد (با استفاده از قضیه گولدن، این اندازه ها به آسانی به دست می آید). نهایت باید توجه داشته باشید که تعریف و ترسیم ساده هندسی برای این نقاط در دست نیست.

**سؤال ۲:** در صفحه ۴۶ بکان شماره ۵ مربوط به حل دو مسئله از کنکور فرانسه ذکر شده است که «مماسهای مرسوم بر این منحنی در نقاط  $A(-\frac{2}{3}, 0)$  و  $B(0, 1)$  با یکدیگر موازیند، پس بین این دو نقطه حتماً يك نقطه عطف وجود دارد». آیا در تمام منحنیها این خاصیت وجود دارد؟ یا منحصر به منحنیهای محدودی می باشد؟  
(حق نواز)

**جواب:** اگر شاخه منحنی بین آن دو مماس پیوسته باشد، حتماً مماس بر یکی از نقاط آن شاخه از منحنی خواهد گذشت. در بین نقاطی که مماس بر آنها از منحنی عبور می کند یکی هم نقطه عطف است. البته نقاط دیگری هم هستند که همین خاصیت

را دارند، نهایت معادله منحنیهایی که دارای چنین نقاطی در ادیکالی هستند. چون اینگونه نقاط، به غیر از نقطه عطف، در ریاضیات عالی معرفی می شوند، از دانش آموز متوسطه استدلال فوق را برای وجود نقطه عطف می توان پذیرفت.

\*\*\*

**سؤال:** در کتاب يك، دو، سه، بینهایت ترجمه آقای احمدپیرشك صفحه ۳۰ نوشته شده است که «وینو گراف ریاضیدان روسی ثابت کرده است که هیچ عدد جفتی نمی تواند مجموع بیش از چهار عدد اول باشد»، در صورتیکه من ۱۰۰۰ را می توانم به این صورت بنویسم:

$$1000 = 97 + 3 + 181 + 19 + 293 + 7 + 389 + 11$$

چون احکام ثابت شده ریاضی استثناء قبول نمی کند آیا من مرتکب اشتباهی شده ام؟

(ناصر طاعتی)

**جواب:** به طور قطع اگر وینو گراف ثابت کرده بود که هر عدد زوجی حداکثر مجموع چهار عدد اول است، مثالی که شما مرقوم فرموده اید بهترین شاهد برای نقض بیان او می بود. ولی خوشبختانه یا متأسفانه، آنچه وینو گراف ثابت کرده است مختصری با این تفاوت دارد. وینو گراف ثابت کرده است که «هر عدد زوج، بزرگتر از حدی معین، مجموع حداکثر چهار عدد اول است» متأسفانه وینو گراف نتوانسته است که این حد معین را مشخص سازد. بنابراین مثال شما با آنچه در واقع وینو گراف ثابت کرده است متناقض نیست. شاید آقای گاموف نویسنده کتاب يك، دو، سه، بینهایت صلاح آن دیده باشند که گفته وینو گراف را با جرح و تعدیل در کتاب خود بیان کنند.

\*\*\*

**سؤال:** اگر يك پاره خط بگیریم و بر دو سر آن دو خط عمود کنیم، این دو خط متوازی می شوند و یکدیگر را در بینهایت قطع می کنند. از تقاطع آنها مثلی به وجود می آید که دارای دو زاویه قائمه و يك زاویه دیگر است که از صفر بیشتر است. بنابراین آیا درست نیست که یکی از دو قانون زیر را بپذیریم؟

۱- مجموع زوایای داخلی يك مثلث بیش از دو قائمه است؟  
۲- دو خط متوازی در بینهایت نیز همدیگر را قطع نمی کنند؟

(غلامرضا - غلامحسین - پنجم طبعی دبیرستان دهقان تبریز)  
**جواب:** در ریاضیات مفهوم اینکه بگویم دو خط متوازی هرگز یکدیگر را قطع نمی کنند یا دو خط متوازی در بینهایت متقاطعند یکی است، چه بینهایت، جای مشخصی نیست که شما بگویید در آنجا دو خط متوازی یکدیگر را قطع میکنند. هر وقت دو خط متوازی (۱۱) یکدیگر را در نقطه ای قطع کنند، ولو آن نقطه بسیار بسیار دور باشد، مطمئن باشید که آنجا بینهایت نیست. زاویه بین دو خط متوازی صفر است و از صفر بیشتر نیست.



# از جمله نامه‌های رسیده

آموزشگاهی بدست می‌آورد از تحقیقات شخصی در زمینه‌های علمی نیز غافل نبوده و در این باره به پیشرفت‌هایی نائل می‌شود. چنانچه این دانش‌آموز با استعداد در حل معادلات درجه سوم در حالت خاص راه حل تازه‌ای کشف نموده است و امید می‌رود به توفیق‌های بیشتری نایل آید.

آقای حسین عظیمی به ضمیمه نامه دبیر خود برای تعیین ریشه‌های معادله درجه سوم در حالیکه ریشه مضاعف دارد روشی ارائه داده و روابطی بین ریشه‌ها و ضرایب بدست آورده است و همچنین برای قابلیت تقسیم اعداد بر ۱۳ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۹ روش‌هایی را بیان داشته است.

یکان - توفیق بیشتر آقای عظیمی را آرزو مندیم

\*\*\*

آقای یدالله ارضی از اراک در نامه مفصل خود اولاً راجع به حل مسئله جبر امتحان نهائی ششم طبیعی که در شماره ۶ یکان چاپ شده است راه حلی بیان داشته‌اند که بموقع توسط طرح‌کننده سؤال امتحان مزبور به ضمیمه بارم نمره مسائل برای حوزه‌های امتحانی ارسال شده است و در موقع مناسب در مجله درج خواهد گردید.

ثانیاً راجع به مسئله ۱۵۰۰ توضیح داده‌اند که این مسئله با کمی اختلاف در کتاب فیزیک پنجم تألیف (بروخیم - آرام) چاپ شده است.

\*\*\*

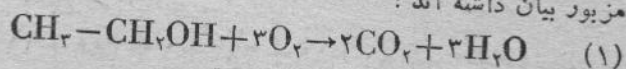
آقایان رضا انگجی - حسین طاهری - زهر اقدوسی

به نمایندگی از طرف ۲۷۵ نفر فارغ التحصیلان ششم دبیرستان ضمن نامه‌ای مشروح خواسته‌اند که دانشکده علوم در تأسیس مجدد کلاسهای تهیه برای داوطلبان ورود به دانشگاه اقدام نماید تا به این وسیله موجبات راهنمایی بسیاری از جوانان مملکت در کسب تحصیلات عالیه فراهم آمده باشد.

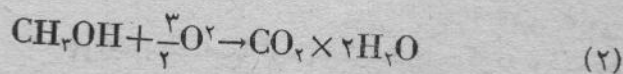
یکان - در بسیاری از کشورها، برای داوطلبانی که برای ورود به دانشکده‌ها معلومات کافی ندارند کلاسهای مقدماتی تشکیل میشود و محصلین این کلاسها در صورت موفقیت در امتحان مربوطه بدون کنکور در دانشکده ثبت نام می‌نمایند. مناسب است که در ایران هم اینگونه کلاسها تشکیل شود، دست کم فارغ التحصیلان دبیرستان با گذراندن این کلاسها با نحوه امتحانات ورودی دانشگاه آشنائی می‌یابند.

یکان

آقای عبدالحسین ساوه دبیر شیمی دبیرستان پهلوی کرمان راجع به حل مسئله شیمی که به شماره ۱۵۰۲ در شماره ۸ چاپ شده است توضیح داده‌اند که بجای آنکه مسئله مانند يك مسئله جبر حل شود بهتر بود راه حل معمولی مسائل شیمی مراعات می‌گردید و ضمن نامه خود راه حل زیر را برای مسئله مزبور بیان داشته‌اند:



$$\frac{3 \times 32}{0.100}$$



$$\frac{3 \times 16}{0.100}$$

متانل.

اگر مخلوط شامل صد درصد اتانل و صفر درصد متانل باشد از رابطه (۱) چنین بدست می‌آید

$$\frac{K}{K'} = \frac{3 \times 32}{3 \times 18} = \frac{16}{9}$$

و اگر بعکس مخلوط شامل صد درصد متانل و صفر درصد اتانل باشد از رابطه (۲) بدست می‌آید که:

$$\frac{K}{K'} = \frac{3 \times 16}{3 \times 18} = \frac{4}{3}$$

و چون نسبت اختلاط دو جسم درصد قسمت همیشه عددی است بین صفر و صد یعنی از صد تجاوز نمی‌کند پس در صورتیکه اتانل زیاد

شود نسبت  $\frac{K}{K'}$  به  $\frac{16}{9}$  نزدیک می‌گردد و از آن نمی‌تواند بیشتر

باشد و بعکس، در صورتیکه متانل زیاد شود نسبت  $\frac{K}{K'}$  به  $\frac{4}{3}$  نزدیک شده و از آن نمی‌تواند کمتر باشد بنا بر این خواهیم داشت

$$\frac{4}{3} < \frac{K}{K'} < \frac{16}{9}$$

\*\*\*

آقای حسین سلطانی دبیر ریاضیات دبیرستان مغربی

اصطلاحات در نامه خود نوشته‌اند:

آقای حسین عظیمی که سال تحصیلی گذشته در کلاس سوم دبیرستان تحصیل می‌کرده است از جمله دانش‌آموزان ممتاز و با استعدادی است که علاوه بر موفقیت‌هایی که در تحصیلات

## پاسخ‌های رسیده در باره حل مسائل شماره ۸

در باره حل مسائل شماره ۸ که در این شماره چاپ شده است، نام کسانی که پاسخ فرستاده‌اند و نامه‌های آنها تا ۲۰ آبان واصل شده است ذیلاً به ترتیب شماره مسائل ذکر می‌شود :

- ۱۵۰۳ بیوک مددی - محمد جواد غفوری - یوسف قانع - هاشم اخوان مشائی
- ۱۵۰۴ مهدی فردوسی - بیوک مددی - احمد مشرفی - علی صحرا نورد - مجید خرمی - سید رضا کافی  
یوسف قانع - هاشم اخوان .
- ۱۵۰۵ حسین محمودی هاشمی - مهدی فردوسی - احمد مشرفی - سید رضا کافی - منوچهر فنائی - حسین جعفری گلپایگانی - هاشم اخوان .
- ۱۵۰۶ مهدی فردوسی - بیوک مددی - احمد مشرفی - عبدالله ابوالاحرار - مجید خرمی - سید رضا کافی  
منوچهر فنائی - یوسف قانع - عباسعلی کوچکی - هادی افشار - حسین جعفری گلپایگانی .
- ۱۵۰۷ مهدی فردوسی - اکبر مأنوسی - مهرداد لاله‌زاری - یوسف قانع - بیوک مددی - احمد مشرفی  
عبدالله ابوالاحرار - مجید خرمی - منوچهر فنائی - محمد جواد غفوری - احمد داروئی - رحیم خیر دوست - حسین رزاقی زاده .
- ۱۵۰۸ مهرداد لاله‌زاری - بیوک مددی - یوسف قانع - احمد داروئی - رحیم خیر دوست - حسین جعفری  
گلپایگانی - هاشم اخوان .
- ۱۵۰۹ حسین محمودی هاشمی - یوسف قانع - حسین نادمپور - سید حسن مرتضوی - اکبر مأنوسی -  
مهرداد لاله‌زاری - بیوک مددی - احمد مشرفی - سید رضا کافی - علی صحرا نورد - عبدالله ابوالاحرار - مجید خرمی  
سید علیرضا فاضلی - منوچهر فنائی - محمد جواد غفوری - فرهاد مالی - احمد داروئی - هادی افشار - هاشم اخوان .
- ۱۵۱۰ بیوک مددی - عبدالله ابوالاحرار - مجید خرمی - احمد داروئی - عباسعلی کوچکی .
- ۱۵۱۱ یوسف قانع - بیوک مددی - محمد جواد غفوری - احمد داروئی .
- ۱۵۱۲ بیوک مددی - محمد هاشم پسران - احمد داروئی .
- ۱۵۱۳ حسین نادمپور - یوسف قانع - بیوک مددی - احمد مشرفی - سید رضا کافی - عبدالله ابوالاحرار  
مجید خرمی - احمد داروئی - پرویز ابرار اصل - هادی افشار .
- ۱۵۱۴ احمد مشرفی - احمد داروئی - عباسعلی کوچکی .
- ۱۵۱۵ مهرداد لاله‌زاری - یوسف قانع - بیوک مددی - احمد مشرفی - محمد جواد غفوری - احمد داروئی  
رحیم خیر دوست .
- ۱۵۱۶ سید رضا کافی - مجید خرمی .
- ۱۵۱۷ سید حسن مرتضوی - احمد مشرفی - سید رضا کافی - احمد داروئی - حسین جعفری گلپایگانی -



۱۵۱۹ - یوسف قانع - بیوک مددی - احمد مشرفی - سید رضا کافی - علی اصغر عرب - احمد داروئی - رحیم خیر دوست - هادی افشار .

۱۵۲۰ - بیوک مددی - علی اصغر عرب - احمد داروئی - رحیم خیر دوست - حسین رزاقی زاده .

۱۵۲۱ - یوسف قانع - مهدی فردوسی - بیوک مددی - منصور جابری - حسین رزاقی زاده - زهرامعینی .

۱۵۲۲ - محمد رزم جو - محمد علی داماد سادات .

۱۵۲۳ - بیوک مددی - هادی افشار .

۱۵۲۸ - حسین محمودی هاشمی - حسین نادمپور - داود تراکمه - علی اصغر ترابی - اسدالله مس فروش -

منوچهر فنائی - علی اصغر منتظر حقیقی - محمد جواد غفوری - محسن چهل تنی - منصور جابری - حسین رزاقی زاده .

۱۵۲۹ - بیوک مددی - کاظم مددی - عباسعلی کوچکی - حسین رزاقی زاده .

۱۵۳۰ - حسین نادمپور - زهرامعینی - اکبر مانوسی - اسدالله مس فروش - یوسف قانع - بیوک مددی - کاظم مددی .

محمود صابر همیشگی - منوچهر فنائی - علی اصغر منتظر حقیقی - محمد جواد غفوری - حسن شبابی - علی اصغر ترابی .

رحیم خیر دوست - احمد علی اختری - رسول کلاهدوزان - حسین رزاقی زاده .

۱۵۳۱ - حسین محمودی هاشمی - حسین نادمپور - اسدالله مس فروش - یوسف قانع - محمود صابر همیشگی .

حسن شبابی - محسن چهل تنی - رحیم خیر دوست - رسول کلاهدوزان - حسین رزاقی زاده .

۱۵۳۲ - یوسف قانع - اسدالله مس فروش - علی اصغر منتظر حقیقی - رحیم خیر دوست - بیوک مددی .

۱۵۳۳ - یوسف قانع - بیوک مددی - داود تراکمه - علی اصغر منتظر حقیقی - رسول کلاهدوزان .

۱۵۳۴ - حسین نادمپور - مهدی فردوسی - زهرامعینی - احمد علی اختری - یوسف قانع - بیوک مددی .

دینیار ترکی - داود تراکمه - اسدالله مس فروش - علی اصغر منتظر حقیقی - منصور جابری - حسن شبابی -

محمد علی داماد سادات - علی اصغر ترابی - رحیم خیر دوست - عباسعلی کوچکی - رسول کلاهدوزان - حسین رزاقی زاده .

علی اصغر ترابی .

۱۵۳۵ - حسین نادمپور - مهدی فردوسی - اکبر مانوسی - بیوک مددی - داود تراکمه - حسن شبابی .

رحیم خیر دوست - پرویز ابرار اصل . (چاپ بقیه نامه در این شماره میسر نشد ، در شماره ۱۰ چاپ خواهد شد)

#### بقیه هفت پل

۱۹ - اگر فقط دو عدد روبروی حروف فرد وبقیه زوج باشند، حل مسأله ممکن است مشروط به آنکه از منطقه ای شروع کنیم که تعداد پلهایش فرد باشد . در حقیقت، نصف هر عدد زوج و نصف هر عدد فرد را پس از آنکه ۱ به آن افزوده شود . اختیار می کنیم، مجموع این نصفها ۱ واحد بیشتر از عدد پلهای، یعنی مساوی با عدد بالای جدول است. اما اگر ۲ یا ۶ یا ۸ یا ... عدد از اعداد ستون دوم فرد باشد واضح است که مجموع اعداد ستون سوم ۱ یا ۲ یا ۳ یا ... واحد بزرگتر از عدد بالای جدول خواهد شد و راه پیمایی با شرایط مطلوب میسر نخواهد بود .

۲۰ - پس در هر صورت و در هر حال آسانترین راه برای تشخیص آنکه فقط یک بار عبور از هر پل ممکن یا غیر ممکن خواهد بود بکار بستن این قواعد است: اگر بیشتر از دو ناحیه وجود داشته باشد که تعداد پلهای منتهی به آنها فرد باشد مسیری که واجد شرایط مطلوب باشد وجود ندارد. هرگاه فقط عدد پلهای منتهی

به دونا حیه فرد باشد، مسأله ممکن است مشروط به آنکه حرکت از یکی از آن دو منطقه شروع شود. و بالاخره اگر عدد پلهای هیچ ناحیه فرد نباشد راه پیمایی میسر است و می توان آن را از هر جا شروع کرد . این قواعد مسأله ای را که طرح شده است. بطور دقیق به جواب می رساند.

۲۱ - پس از آنکه اطمینان حاصل شد که چنین مسیری وجود دارد مسأله دیگری پیش می آید و آن تعیین راهی است که باید طی شود . برای این منظور این قاعده بکار می رود. در اینجا هر دو پلی را که دونا حیه را بهم مربوط می سازد کنار می گذاریم و باین ترتیب از تعداد پلهای بطور قابل توجهی می کاهشیم. آنگاه راه مطلوب را از روی پلهای دیگر رسم می کنیم ، و این کار زیاد دشوار نیست . پس از یافتن طرح مسیر استفاده از پله ای که حذف کرده ایم کار آسانی است و گمان نمی کنم لازم باشد که برای یافتن راه بیشتر از این صحبت شود .

پایان

## يگان سال

به تصمیم شورای نویسندگان یگان، در  
پایان هر سال شماره فوق العاده‌ای به نام:

## يگان سال

منتشر می شود. نخستین شماره «يگان سال»  
در اسفند ماه ۱۳۴۳ منتشر خواهد شد

يگان سال

يگان سال

## يگان سال

## يگان سال

نمایندگان شهرستانها بهمیزان درخواستی (که بدون برگشتی باشد) قبلا وجه حواله نمایند

ابن سینا، اندیشه، ایران، نیل مراجعه نمایند

طالبین در تهران به اداره مجله و یا به یکی از کتابخانه‌های

در شرف اتمام و يك هفته دیگر آماده انتشار است

چاپ سوم شماره اول يگان

## تدریس خصوصی

کلیه دروس متوسطه

و ریاضیات عالی

توسط دانشجوی سال سوم ریاضی

با دفتر مجله يگان راهنمای شماره ۱

تماس بگیرد

ریاضیات، فیزیک، شیمی

سالهای اول و دوم و سوم و چهارم دبیرستان

در خانه

به وسیله دانشجوی دانشکده علوم

با دفتر مجله راهنمای شماره ۲ تماس بگیرد



# دانش آموزان، دانشجویان، دبیران محترم ریاضیات

از چند سال به این طرف چنان تغییرات بزرگی در ریاضیات  
به وقوع پیوسته است که به حق نام آن را می توان انقلاب نامید.  
اگر به ریاضیات علاقمندید و آن را تحصیل یا تدریس  
می کنید باید بدانید که اکنون در صف مقدم این علم از  
چه مباحثی صحبت به میان است.

سلسله کتابهای «کاوش در ریاضیات نوین» با زبانی ساده و همه فهم دریچه دنیای جدید ریاضیات را به  
روی شما می گشاید.

از این سلسله اینک دو کتاب در دسترس دانش پژوهان قرار گرفته است

## تویو لاری

هندسه صفحه لاستیکی

بها : ۳۰ ریال

## مجموعه ها

بها : ۳۰ ریال

بقیه کتابهای این سلسله چنین است :

ماشینهای محاسبه (مغزهای الکترونی)

منطق و استدلال در ریاضیات

تفریحات ریاضی

احتمالات و شانس

منحنیها در فضا

دستگاههای مختلف عدد نویسی

دعوت به ریاضیات

دستگاههای محدود ریاضی

دنیای آمار

راههای کوتاه محاسبه

قالبهای اعداد

ایران - مک گروهیل

سازمان انتشارات و خدمات فرهنگی

خیابان تخت جمشید - چهارراه روزولت شماره ۲۸۲

تلفن : ۷۵۶۸۶۳